

Processus de branchement en temps discret

Marius Garénaux,
sous la direction de Félix Foutel-Rodier et d'Hélène Guérin.

14 janvier 2023

Table des matières

1	Processus de Galton-Watson	3
1.1	Définition	3
1.2	Limite d'un processus de Galton-Watson	6
1.3	Cas sur-critique	11
1.4	Processus avec immigration	14
2	Arbres de Galton-Watson	18
2.1	Formalisme des arbres	18
2.2	Arbres de Galton-Watson à taille biaisée	22
3	Processus de Crump-Mode-Jagers (CMJ)	28
3.1	Définitions	28
3.2	Lien avec les arbres de Galton-Watson	30
3.3	Étude asymptotique de certains CMJ	31
4	Annexe	38
4.1	Cas critique d'un processus de Galton-Watson	38

Introduction

Les processus de branchement sont des modèles probabilistes de biologie. Ces derniers peuvent par exemple décrire l'évolution aléatoire d'une population, ou bien la propagation d'une épidémie. Dans les modèles présentés ici, les individus donnent naissance à une descendance de manière aléatoire, mais selon une loi de probabilité connue. Le modèle le plus classique est celui des processus de Galton-Watson, introduit au 19e siècle, que l'on étudiera dans un premier temps. La construction d'un espace de probabilité d'arbres aléatoires apparaît au 20e siècle, parfois due à Neveu, parfois à Ulam et Harris, et permet de mieux comprendre certains résultats sur ces processus. En particulier, le théorème de Kesten et Stigum se montre à l'aide d'une technique de « décomposition épinale », expliquée dans la seconde partie. Cette méthode, présentée initialement par Lyons, Pemantle et Peres dans un article de 1995 ([RLP95]) a l'avantage de se généraliser à des modèles plus complexes, comme ceux décrits en dernière partie : les processus de Crump-Mode-Jagers. Ce modèle est plus réaliste que celui de Galton-Watson, mais plus complexe à étudier. On donnera un formalisme d'arbres aléatoires dans ce contexte, avant de restreindre l'ensemble des processus étudiés aux processus de CMJ « markoviens en âge ».

1 Processus de Galton-Watson

Une grande partie des résultats présentés dans cette section vient du livre « Recueil de Modèles Aléatoires » [CM18] de Djalil Chafaï et Florent Malrieu.

1.1 Définition

On fixe $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Sauf mention du contraire, les variables aléatoires présentées dans cette partie seront définies sur Ω .

Dans cette section, nous allons présenter un modèle probabiliste discret de dynamique des populations. Partons d'un groupe d'individus, et imaginons qu'ils donnent naissance indépendamment les uns des autres à un nombre aléatoire d'enfants, suivant la même mesure de probabilité $P = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i$, puis meurent. Appelons ces individus la génération 0, et leurs enfants la génération 1. On peut recommencer le processus pour chaque individu de la génération 1, et obtenir la génération 2, et ainsi de suite. Les processus de Galton-Watson modélisent ce genre de situation, où les générations sont séparées. Il est important de noter que les individus ne se reproduisent pas entre eux, mais donnent bien naissance tous seuls à des enfants (on parle de reproduction asexuée), et une seule fois dans leur vie.

Définition 1.1 (Processus de Galton-Watson). Soient $Z_0, (X_{n,k})_{n,k \geq 1}$ des variables aléatoires réelles indépendantes, à valeur dans \mathbb{N} ; et telles que les $(X_{n,k})_{n,k \geq 1}$ sont i.i.d. de loi P . On définit le processus de Galton-Watson $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de loi de reproduction P comme suit :

$$\forall n \geq 0, Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

Remarque. On note $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le processus, et $Z^{(x)}$ lorsque la taille de la population initiale n'est pas aléatoire, c'est-à-dire $Z_0 = x$, pour un entier x .

Dans notre modèle, Z_0 correspond à la taille de la population initiale, et Z_n au nombre d'individus de la génération n . $X_{n+1,k}$ représente quant à lui le nombre d'enfants du k -ième individu de la génération n . On s'autorise donc à numéroter les individus de la génération n de manière arbitraire, qui n'importe pas dans la valeur de Z_n car on les additionne. Enfin, on suit la convention $\sum_{\emptyset} = 0$, afin que si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$ (il n'y a plus d'individus pour faire des enfants!).

On peut visualiser une évolution possible de la population par un arbre (Figure 1). Dans ce cas, $Z_0 = 3, Z_1 = 6, Z_2 = 7$. Remarquons que ce n'est pas le seul arbre qui donne ces valeurs pour Z_0, Z_1, Z_2 . Un formalisme plus approfondi sur les arbres sera introduit dans la partie 2.

Proposition 1.1. *La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, et pour tout $n \geq 0$, $(X_{n+1,k})_{k \geq 1}$ est indépendante de Z_n .*

Démonstration. On pose :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*} &\longrightarrow & \mathbb{N} \\ &(n, (u_i)_{i \geq 1}) &\longmapsto & \sum_{k=1}^n u_k \end{aligned}$$

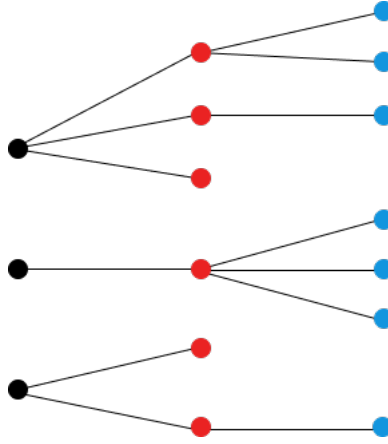


FIGURE 1 – En noir la génération 0, en rouge la 1, et en bleu la 2.

Si on munit $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$ de la tribu cylindrique, et \mathbb{N} de la tribu discrète, alors f est mesurable. On pose pour tout $n \geq 1$, $X_n = (X_{n,k})_{k \geq 1}$. Observons alors que pour tout $n \geq 1$, $Z_n = f(Z_{n-1}, X_n)$. Ainsi, $Z_n = f(f(Z_{n-2}, X_{n-1}), X_n) = \dots = f(\dots(f(Z_0), X_1), \dots, X_n) := F_n(Z_0, X_1, \dots, X_n)$, où F_n est mesurable. Or, par hypothèse, X_{n+1} est indépendante de (Z_0, X_1, \dots, X_n) donc aussi de Z_n . On a de même que X_{n+1} est indépendante de Z_k , $k \leq n$.

Vérifions désormais que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov. On se donne $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{n+1} = a_{n+1} | Z_0 = a_0, \dots, Z_n = a_n) &= \mathbb{P}(f(a_n, X_{n+1}) = a_{n+1} | Z_0 = a_0, \dots, Z_n = a_n) \\ &= \mathbb{P}(f(a_n, X_{n+1}) = a_{n+1}) \text{ par indépendance entre } X_{n+1} \text{ et } Z_0, \dots, Z_n \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = a_{n+1} | Z_n = a_n). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2 (Propriété de branchement). *Soient $Z^{(x)}, Z^{(y)}$ deux processus de Galton-Watson indépendants, de même loi de reproduction P . Alors la somme $Z^{(x)} + Z^{(y)}$ est un processus de Galton-Watson, de loi de reproduction P et de valeur initiale $x + y$. En particulier, on a pour tout $n \geq 0$ l'égalité :*

$$\text{Loi}(Z_n^{(x)} + Z_n^{(y)}) = \text{Loi}(Z_n^{(x+y)}).$$

Démonstration. On pose $(X_{n,k})_{n,k \geq 1}$ et $(Y_{n,k})_{n,k \geq 1}$ deux suites i.i.d., suivant chacune les hypothèses de la Définition 1.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^{(x)} + Z_{n+1}^{(y)} &= \sum_{i=1}^{Z_n^{(x)}} X_{n+1,i} + \sum_{j=1}^{Z_n^{(y)}} Y_{n+1,j} \\ &= \sum_{k=1}^{Z_n^{(x)} + Z_n^{(y)}} W_{n+1,k} \end{aligned}$$

où $W_{n+1,k} = X_{n+1,k}$ si $k \leq Z_n^{(x)}$, et $Y_{n+1,k}$ sinon. La famille de variables aléatoires $(W_{n,k})_{n,k \geq 1}$ est bien i.i.d. et indépendante de $(Z^{(x)} + Z^{(y)})_0 = x + y$, car c'est une constante. □

Proposition 1.3. Soient $Z, \tilde{Z}^{(x)}$ deux processus de Galton-Watson. Alors pour tout $n \geq 0$

$$\text{Loi}(Z_n | Z_0 = x) = \text{Loi}(\tilde{Z}_n^{(x)}).$$

Démonstration. En effet, pour tout $y \in \mathbb{N}$, par indépendance entre Z_0 et $(X_m)_{m \geq 1}$, $\mathbb{P}(Z_n = y | Z_0 = x) = \mathbb{P}(F_n(Z_0, X_1, \dots, X_n) = y | Z_0 = x) = \mathbb{P}(F_n(x, X_1, \dots, X_n) = y) = \mathbb{P}(\tilde{Z}_n^{(x)} = y)$. \square

Ainsi, si on veut étudier la loi d'un processus de Galton-Watson, on peut commencer par considérer la loi du même processus, mais avec une valeur initiale fixée (ou conditionnée) à 1. On supposera donc dans toute la suite que $Z_0 = 1$. On fixe aussi la loi de reproduction P , et on note sa moyenne $m = \sum_{i \geq 0} ip_i = \mathbb{E}(X_{1,1}) \in \bar{\mathbb{R}}_+$, et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_{1,1}) \in \bar{\mathbb{R}}_+$ sa variance, lorsque m est finie.

Proposition 1.4. Si m est finie, alors pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(Z_{n+1} | Z_n) = mZ_n$. De plus,

1. $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$
2. Si σ^2 est finie, $\mathbb{V}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \frac{(m^n - 1)}{m - 1} & \text{si } m \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{sinon} \end{cases}$

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(Z_{n+1} | Z_n) = \sum_{k=1}^{Z_n} \mathbb{E}(X_{n+1,k} | Z_n) = mZ_n$ par indépendance.

En prenant l'espérance des deux côtés, on obtient $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = m\mathbb{E}(Z_n)$, et donc par récurrence $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

Pour la variance, on a :

$$Z_{n+1}^2 = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}^2 + \sum_{k,\ell=1, k \neq \ell}^{Z_n} X_{n+1,k} X_{n+1,\ell}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1}^2 | Z_n] &= Z_n \mathbb{E}[X_{n+1,1}^2] + \sum_{k,\ell=1, k \neq \ell}^{Z_n} \mathbb{E}[X_{n+1,k}] \mathbb{E}[X_{n+1,\ell}] \\ &= Z_n \mathbb{E}[X_{n+1,1}^2] + \sum_{k,\ell=1, k \neq \ell}^{Z_n} \mathbb{E}[X_{n+1,1}]^2 = Z_n \mathbb{E}[X_{n+1,1}^2] + (Z_n^2 - Z_n) \mathbb{E}[X_{n+1,1}]^2 \\ &= Z_n \sigma^2 + Z_n^2 m^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{V}(Z_{n+1}) = m^n \sigma^2 + \mathbb{V}(Z_n) m^2 + m^{2n} m^2 - m^{2(n+1)} = \mathbb{V}(Z_n) m^2 + m^n \sigma^2.$$

Si $m = 1$, on a alors $\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(Z_{n-1}) + \sigma^2 = \dots = n\sigma^2$. Sinon, par récurrence on a :

$$\mathbb{V}(Z_{n+1}) = m^n \sigma^2 \left(1 + m \frac{m^n - 1}{m - 1}\right) = \sigma^2 m^n \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1}.$$

\square

1.2 Limite d'un processus de Galton-Watson

On s'intéresse maintenant à l'évolution du processus Z au cours des générations. On souhaiterait notamment savoir si le nombre d'individus de la population va devenir nul, s'il peut se stabiliser autour d'une certaine valeur, s'il explose...

Lorsque m est finie, on a déjà une indication sur ce qu'il peut se passer grâce au calcul de $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$, qui tend vers 0, $+\infty$ ou 1. On imagine facilement qu'il y a peu de scénarios différents pour la population.

On introduit le temps d'arrêt suivant, appelé *temps d'extinction* :

$$T = \inf\{n \geq 0 \mid Z_n = 0\}.$$

C'est le premier temps où la population s'éteint. Notons qu'il vaut $+\infty$ lorsque la population survit à toute génération. Nous allons également nous intéresser à la *probabilité d'extinction* de la population :

$$x = \mathbb{P}(T < +\infty).$$

On commence par exclure le cas $p_0 = 0$, qui impliquerai que $Z_{n+1} \stackrel{ps}{\geq} Z_n$, et donc $x = 0$. On traite séparément le cas où $p_0 + p_1 = 1$. Dans ce cas, $\mathbb{P}(T = n) = p_1^{n-1}p_0$. Donc T suit une loi géométrique, et est alors fini presque sûrement. C'est-à-dire que $x = 1$. On suppose désormais que $p_0 + p_1 < 1$ et $p_0 > 0$.

Le premier résultat est le suivant :

Théorème 1.1. *Presque sûrement, ou bien la population s'éteint, ou bien elle explose. C'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}(\{Z_n \longrightarrow +\infty\} \cup \{Z_n \longrightarrow 0\}) = 1.$$

De plus, on a les égalités suivantes :

$$\{Z_n \longrightarrow +\infty\} \stackrel{ps}{=} \{T = +\infty\},$$

$$\{Z_n \longrightarrow 0\} = \{T < +\infty\}.$$

Autrement dit, il n'y a que deux cas possibles pour notre population. Ainsi, par exemple, les scénarios où le nombre d'individu se stabilise ou tourne autour d'une valeur strictement positive n'arrivent pas ; ou plutôt peuvent arriver, mais avec probabilité 0.

Démonstration. La preuve utilise le fait que Z est une chaîne de Markov. 0 est un état absorbant, donc récurrent, et sa classe de récurrence est juste $\{0\}$. Nous allons montrer que tous les autres états sont transitoires.

Soit $z > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0 \mid Z_0 = z) = \mathbb{P}(X_{1,1} = 0, \dots, X_{1,z} = 0) = p_0^z.$$

Si z était récurrent, alors comme $p_0^z > 0$, il serait dans la même classe de récurrence que 0, donc ce serait 0, ce qui est impossible. Donc z est transitoire.

Or, la chaîne ne visite presque sûrement qu'un nombre fini de fois chaque état transitoire. Il nous reste donc (presque sûrement) deux alternatives :

1. La chaîne se fait absorber par l'état 0, et donc $Z_n \rightarrow 0$.
2. La chaîne ne se fait pas absorber par 0, mais elle ne peut visiter qu'un nombre fini de fois chaque intervalle borné de \mathbb{N} , donc elle tend vers l'infini.

Comme Z est une suite entière, on a pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Z_n(\omega) \rightarrow 0 \iff \exists n \geq 0, Z_n(\omega) = 0 \iff T(\omega) < +\infty.$$

On a donc la seconde égalité. Pour la première on remarque que, pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $Z_n(\omega) \rightarrow +\infty$, alors $Z_k(\omega)$ n'est jamais nul, quelque soit l'entier k . Donc $T(\omega) = \infty$, et $\{Z_n \rightarrow +\infty\} \subset \{T = +\infty\}$.

Réciproquement, si $T(\omega) = \infty$, alors $Z_n(\omega)$ ne tend pas vers 0. Donc on a :

$$\{T = +\infty\} \cap \{Z_n \rightarrow +\infty\} \subset \{Z_n \rightarrow 0\} \cap \{Z_n \rightarrow +\infty\}.$$

D'où l'inclusion presque sûre réciproque. □

Selon la loi de reproduction P choisie, nous allons voir que x prend des valeurs différentes. En particulier, si on s'intéresse à la moyenne m de la loi, on a un critère efficace pour décrire le comportement de notre processus.

Tout d'abord, nous introduisons la notion de fonction génératrice :

Définition 1.2 (Fonction génératrice). Soit X une variable aléatoire réelle positive. On définit la fonction génératrice de X par :

$$\begin{aligned} g &: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ s &\longmapsto \mathbb{E}(s^X). \end{aligned}$$

Remarque. 1. Pour tout $s \in [0, 1]$, $\omega \mapsto s^{X(\omega)}$ est une application mesurable positive et inférieure ou égale à 1. Elle donc intégrable, même lorsque X ne l'est pas.

2. Dans notre cas, on note g la fonction génératrice de $X_{1,1}$, qui vaut pour tout $s \in [0, 1]$:

$$g(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i s^i.$$

On reconnaît une série entière, donc comme $g(1) = 1 < +\infty$, on sait que $g(s)$ est fini lorsque $s \in [0, 1]$. De plus, g est \mathcal{C}^∞ sur $]0, 1[$, et on peut dériver terme à terme.

L'utilité des fonctions génératrices dans ce cadre vient de la proposition suivante :

Proposition 1.5. Pour tout $n \geq 0$, on note g_n la fonction génératrice de Z_n . On a alors :

$$g_n = g \circ g \circ \dots \circ g = g^{\circ n}.$$

Démonstration. On fait la preuve par récurrence. On remarque que les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont couverts par l'hypothèse $Z_0 = 1$, et car $Z_1 \sim P$. Pour l'hérédité, on a pour tout $n \geq 0$:

$$g_{n+1}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} | Z_n]].$$

Or,

$$\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} | Z_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{Z_n} s^{X_{n+1,k}} \mid Z_n\right] = \mathbb{E}[H(Z_n, X_{n+1}) | Z_n],$$

où

$$H : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*} \longrightarrow \mathbb{N} \\ (z, (x_k)_{k \geq 1}) \longmapsto \prod_{k=1}^z x_k$$

est mesurable. Comme X_{n+1} est indépendante de Z_n et que pour tout z :

$$\mathbb{E}[H(z, X_{n+1})] = g(s)^z.$$

On a [Bre21, Chap 2] :

$$\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} | Z_n] = g(s)^{Z_n}.$$

Donc au final :

$$g_{n+1}(s) = g_n(g(s)).$$

□

Proposition 1.6. $x = \mathbb{P}(T < +\infty)$ est un point fixe de g .

Démonstration. Par le Théorème 1.1, on a que $x = \mathbb{P}(Z_n \longrightarrow 0) = \mathbb{P}(\exists n \geq 0, Z_n = 0)$. Or les événements $(\{Z_n = 0\})_{n \geq 0}$ forment une suite croissante d'ensembles, donc :

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(0).$$

Ainsi, comme g est continue :

$$g(x) = g\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(0)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_{n+1}(0) = x.$$

Et x est bien un point fixe de g .

□

Remarque. On peut retrouver ce résultat directement grâce aux chaînes de Markov. Pour une chaîne de Markov quelconque Z de matrice P sur un ensemble E , on note $\rho(z)$ la probabilité d'absorption dans une classe de récurrence E_R , sachant que la chaîne part de $z \in E$. C'est à dire $\rho(z) = \mathbb{P}_z(S < +\infty)$, où $S = \inf\{n \geq 0, Z_n \in E_R\}$. Alors on a le résultat général suivant, dans le cas où z est un état transitoire [Bre21, Chap 6] :

$$\rho(z) = \sum_{y \in E} P(z, y) \rho(y).$$

Dans notre cas, $E_R = \{0\}$ et $S = T$. Comme la chaîne part de 1, on a :

$$\rho(1) = \sum_{y \in \mathbb{N}} P(1, y) \rho(y).$$

Or, $P(1, y) = \mathbb{P}(Z_1 = y | Z_0 = 1) = \mathbb{P}(X_{1,1} = y) = p_y$. Et par la propriété de branchement, $\rho(y) = \rho(1)^y$. On retrouve bien que $\rho(1)$ est un point fixe de g .

Afin d'étudier x , on s'est donc ramené à un problème d'étude des points fixes d'une fonction.

Théorème 1.2. *Selon les valeurs de m , il y a deux cas possibles :*

1. $m \leq 1$, et alors $x = 1$: la population s'éteint presque sûrement.
2. $m > 1$, et alors $0 < x < 1$: la population s'éteint avec probabilité x , et explose avec probabilité $1 - x$.

Démonstration. Dans l'intervalle $I =]0, 1[$, les dérivées de g sont les dérivées termes à termes. Sur I , on a donc :

$$g''(s) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \geq 0.$$

Ainsi, g est convexe sur $[0, 1]$. Comme $p_0 + p_1 < 1$, au moins un des p_i ($i \geq 2$) est non nul, et donc $g''(s) > 0$ lorsque $s \in I$. Ainsi, g est en fait strictement convexe.

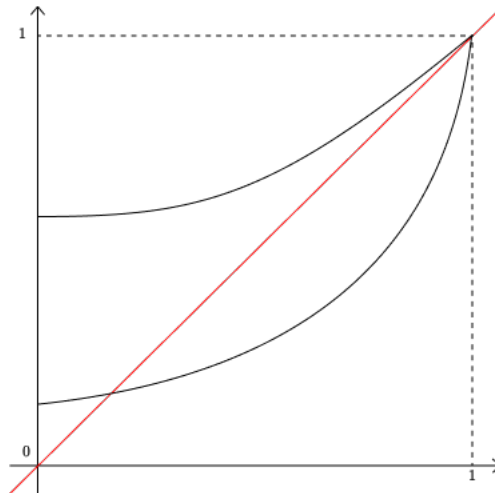


FIGURE 2 – En rouge la première bissectrice, et en noir deux exemples de graphes pour g .

Comme $g(1) = 1$, la première bissectrice et le graphe de g s'intersectent en $(1, 1)$. De plus, le graphe de g à une tangente à gauche en 1, de coefficient directeur $\lim_{s \rightarrow 1^-} g'(s) = m$.

Si $m \leq 1$, alors sur $[0, 1]$, la première bissectrice est en dessous de la tangente à gauche en 1 qui est elle-même, par stricte convexité, strictement en dessous du graphe de g . Ainsi, le graphe de g et la première bissectrice ne s'intersectent pas sur $[0, 1[$. Comme x est un point fixe dans $[0, 1]$, alors $x = 1$.

Si $m > 1$, alors on étudie la fonction continue :

$$\begin{aligned} G &: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) - x. \end{aligned}$$

Elle est aussi strictement convexe, car g l'est, et $x \mapsto -x$ également. Sa dérivée vaut $p_1 - 1 < 0$ en 0^+ , et $m - 1 > 0$ en 1^- . Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule en un point x_0 dans $]0, 1[$. Donc G atteint son unique minimum en ce point, et donc G est décroissante sur $[x_0, 1]$ donc négative ($G(1) = 0$). En particulier, elle ne s'annule qu'en un unique point dans $[0, 1[$. Comme $m = g'(1^-) > 1$, 1 est un point fixe répulsif, on ne peut pas avoir $x = 1$. Par conséquent, $x < 1$. Comme 0 n'est pas un point fixe, on a aussi $x > 0$. \square

Remarque. On distingue ainsi 3 cas :

1. Lorsque $m < 1$, on parle de cas sous-critique.
2. Lorsque $m = 1$, on parle de cas critique.
3. Lorsque $m > 1$, on parle de cas sur-critique.

Le cas sur-critique sera particulièrement étudié par la suite. Un résultat sur le cas critique est présenté en annexe.

On suppose désormais que m est finie, ce qui nous permet d'introduire la suite de variables aléatoires réelles :

$$Y_n = \frac{Z_n}{m^n}.$$

Proposition 1.7. $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration canonique :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_n) = \sigma(Z_0, \dots, Z_n).$$

Démonstration. Elle est intégrable car m est finie (Proposition 1.4), elle est Z_n -mesurable, et enfin :

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \frac{\mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_0, \dots, Z_n]}{m^{n+1}} = \frac{\mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_n]}{m^{n+1}} \text{ car } Z \text{ est une chaîne de Markov.}$$

Donc par la Proposition 1.4 :

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \frac{mZ_n}{m^{n+1}} = Y_n. \quad \square$$

Proposition 1.8. La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y_∞ intégrable.

Démonstration. Comme c'est martingale positive, on a directement la convergence presque sûre ([Bre21, Chap 4]) vers une variable aléatoire intégrable, que l'on note Y_∞ . \square

Remarque. Bien que Y_∞ soit intégrable, la convergence n'a pas pour autant lieu dans L^1 . En effet, on aurait sinon la convergence de $(\mathbb{E}(Y_n))_{n \geq 0}$ vers $\mathbb{E}(Y_\infty)$, et donc $\mathbb{E}(Y_\infty) = 1$. Or, cette égalité n'est pas tout le temps vraie, comme le montre le raisonnement suivant :

Quelque soit la valeur de m , on a toujours :

$$\{T < +\infty\} \subset \{Y_\infty = 0\}. \quad (1)$$

Car dès que $T(\omega) < +\infty$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $Z_n(\omega) = 0$. Et donc à partir de ce rang, $Y_m(\omega) = 0$, et donc $Y_\infty(\omega) = 0$.

Dans le cas où $m \leq 1$, le Théorème 1.2 nous montre que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$. Combiné avec (1), on a donc $Y_\infty = 0$ presque sûrement. Ainsi, $\mathbb{E}(Y_\infty) = 0 \neq 1$.

1.3 Cas sur-critique

Dans le cas $m \leq 1$, l'inclusion (1) est ainsi une égalité presque sûre. Il est raisonnable de se demander si cette égalité tient encore lorsque $m > 1$. La réponse est oui, mais sous une hypothèse supplémentaire.

Proposition 1.9. *On se place dans le cas sur-critique ($m > 1$). Si $\mathbb{E}(Y_\infty) = 1$, alors on a l'égalité presque sûre :*

$$\{T < +\infty\} = \{Y_\infty = 0\}.$$

De plus, on a alors presque sûrement l'alternative suivante :

1. *Avec probabilité x , $Y_\infty = 0$. La population s'éteint.*
2. *Avec probabilité $1 - x$, $Y_\infty > 0$ et dans ce cas, $Z_n \sim_{n \rightarrow +\infty} m^n Y_\infty$ presque sûrement. La population explose.*

Démonstration. Pour montrer l'égalité presque sûre ; il nous suffit, grâce à l'inclusion (1), de montrer que ces deux événements ont même probabilité. Pour cela, on utilise la Proposition 1.6 et le Théorème 1.2 en montrant que $\mathbb{P}(Y_\infty = 0)$ est un point fixe de g . On a :

$$\mathbb{P}(Y_\infty = 0 | Z_1 = z) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}} = 0 | Z_1 = z\right).$$

Par la Proposition 1.3, on sait que la loi de Z_{n+1} conditionnellement à l'événement $\{Z_1 = z\}$ est la même que la loi de $Z_n^{(z)}$, qui est par la Proposition 1.2 la même que la loi de $\sum_{j=1}^z Z_{n,j}^{(1)}$ (somme de z processus de Galton-Watson indépendants). On a donc :

$$\mathbb{P}(Y_\infty = 0 | Z_1 = z) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^z Y_{n,j}^{(1)} = 0\right).$$

Or, les suites variables aléatoires $(Y_{n,j})_{n \geq 0}$ sont positives, donc la limite de leur somme est nulle si et seulement si chacune de leur limite est nulle. Et donc :

$$\mathbb{P}(Y_\infty = 0 | Z_1 = z) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^z \{Y_{n,j} \rightarrow 0\}\right) = \mathbb{P}(Y_{n,1} \rightarrow 0)^z = \mathbb{P}(Y_\infty = 0)^z.$$

Au final, on a :

$$g(\mathbb{P}(Y_\infty = 0)) = \sum_{z=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_\infty = 0 | Z_1 = z) \mathbb{P}(Z_1 = z) = \sum_{z=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_\infty = 0, Z_1 = z) = \mathbb{P}(Y_\infty = 0).$$

Maintenant, on sait par notre étude de la fonction g (Théorème 1.2) qu'il n'y a que deux points fixes sur $[0, 1]$: 1 et $\mathbb{P}(T < \infty)$. On ne peut pas avoir $\mathbb{P}(Y_\infty = 0) = 1$, car sinon $\mathbb{E}(Y_\infty) = 0 \neq 1$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y_\infty = 0) = \mathbb{P}(T < \infty)$.

Le point 1. découle directement du raisonnement ci-dessus. Quant au point 2., on sait alors que $\mathbb{P}(Y_\infty > 0) = 1 - x > 0$. Comme $Y_n \rightarrow Y_\infty$ presque sûrement, on sait que :

$$\{Y_\infty > 0\} \cap \left\{ \frac{Y_n}{Y_\infty} \rightarrow 1 \right\} \stackrel{ps}{=} \{Y_\infty > 0\}.$$

D'où,

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{Y_\infty} \rightarrow 1 | Y_\infty > 0\right) = 1.$$

□

La proposition suivante traite le cas où la loi de reproduction a une variance finie, ce qui permet de vérifier l'hypothèse de la Proposition 1.9.

Proposition 1.10. *Si $m > 1$ et $\sigma^2 < +\infty$, alors $\mathbb{E}(Y_\infty) = 1$, et donc par la Proposition 1.9,*

$$\mathbb{P}(Y_\infty = 0) = \mathbb{P}(T < +\infty) = x \in]0, 1[.$$

Démonstration. On utilise la formule de la variance de Z_n (Proposition 1.4) :

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \frac{\mathbb{V}(Z_n) + \mathbb{E}(Z_n)^2}{m^{2n}} = 1 + \frac{\sigma^2}{m(m-1)} \frac{m^n - 1}{m^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sigma^2}{m(m-1)}.$$

Ainsi, $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(Y_n^2) < +\infty$. Donc comme $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale, elle converge dans L^2 vers la seule limite possible, Y_∞ . En particulier, on a la convergence des espérances, et :

$$\mathbb{E}(Y_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_n) = 1.$$

On conclut grâce à la Proposition 1.9. □

Dans le cas où la loi P admet une variance, on a donc $\mathbb{P}(Z_n \sim_{n \rightarrow +\infty} m^n Y_\infty | Y_\infty > 0) = 1$. Autrement dit, si on ne s'intéresse qu'aux scénarios de non-extinction de la population, alors $Z_n \sim_{n \rightarrow +\infty} m^n Y_\infty$, et donc la croissance est exponentielle. Dans la partie suivante, on donne une condition nécessaire et suffisante sur la loi de reproduction pour obtenir l'égalité presque sûre :

$$\{Y_\infty = 0\} = \{T < +\infty\}.$$

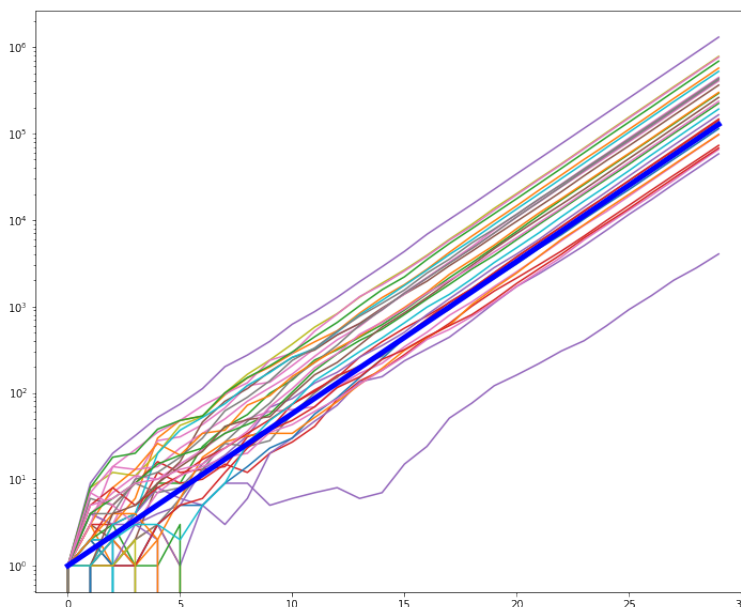


FIGURE 3 – 60 trajectoires de Z , chacune sur 30 générations, échelle log en ordonnée

Dans tous les cas, on a quand même , $\mathbb{P}_{|Y_\infty > 0} - ps$,

$$\log(Z_n) - \log(m^n Y_\infty) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Et donc :

$$\log(Z_n) - n \log(m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \log(Y_\infty) \quad (2)$$

Figure 3 sont représentées des simulations de trajectoires de Z , où la loi P est une loi géométrique sur \mathbb{N} de moyenne $m = 1.5$. En bleu, on a représenté la courbe d'équation $y = m^x$, avec $m = 1.5$.

Sur cette simulation, on retrouve le fait que dans certains cas, la population s'éteint. Dans le reste des cas, elle se stabilise sur une droite (en échelle log).

Par la formule 2, $\log(Y_\infty)$ correspond sur le graphique à la différence de hauteur entre les trajectoires et la droite bleue, d'équation $y = x \log(m)$.

En quelque sorte, Y_∞ représente la partie aléatoire d'une trajectoire. Si on regarde un processus de Galton-Watson déterministe, où chaque individu donne naissance à m enfants, alors le nombre d'enfants à la génération n vaut $m^n z_0$, où z_0 est le nombre d'individus dans la population initiale. Asymptotiquement, on retrouve avec notre modèle aléatoire le modèle déterministe associé. On peut imaginer que Y_∞ représente le nombre (aléatoire) d'individus dans la population initiale, qui évolue ensuite de manière déterministe.

Pour conclure cette partie sur les processus de Galton-Watson sur-critique, on donne un Théorème important, qui sera démontré dans la prochaine section. Il donne une condition nécessaire et suffisante sur la loi de reproduction P pour avoir l'égalité presque sûre 1.

Théorème 1.3. [Kesten et Stigum] Soit $(Z_n)_{n \geq 0}$ un processus de Galton-Watson sur-critique, de loi de reproduction $\text{Loi}(X)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$.
2. $\mathbb{E}[X \ln_+(X)] < +\infty$.
3. $\{Y_\infty = 0\} \stackrel{p.s.}{=} \{T < +\infty\}$.

Où $\ln_+(x) = \max(0, \ln(x))$, étendue par 0 en 0.

1.4 Processus avec immigration

On peut complexifier un processus de Galton-Watson en rajoutant à chaque génération des individus en plus de ceux déjà nés. Ces processus sont appelés processus de Galton-Watson avec immigration et seront utilisés dans la suite.

Définition 1.3. Pour tout $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on définit le processus de Galton-Watson avec immigration a , de loi de reproduction P , par :

$$\tilde{Z}_0 = 0, \quad \tilde{Z}_n = \sum_{i=0}^n Z_{n-i}^{(i)},$$

où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $Z^{(i)}$ est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction P , initialisé à $Z_0^{(i)} = a_i$. Les processus $(Z^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ sont supposés indépendants.

On définit la filtration $\mathcal{G}_n = \sigma(Z_k^{(i)}, i \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \in \llbracket 0, n-i \rrbracket)$, et la tribu $\mathcal{G} = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n)$.

Proposition 1.11. Soit \tilde{Z} un processus de Galton-Watson avec immigration $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de loi de reproduction sur-critique. Si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{m^n} < +\infty, \tag{3}$$

alors $\left(\frac{\tilde{Z}_n}{m^n}\right)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{G}_n -sous-martingale qui converge presque-sûrement vers une variable aléatoire intégrable.

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}_{n+1} | \mathcal{G}_n] = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbb{E}[Z_{n+1-i}^{(i)} | \mathcal{G}_n].$$

Or, on a pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{E}[Z_{n+1-i}^{(i)} | \mathcal{G}_n] = m Z_{n-i}^{(i)}$. En $i = n+1$, on a $Z_0^{(n+1)} = a_{n+1}$, d'où :

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}_{n+1} | \mathcal{G}_n] = m \tilde{Z}_n + a_{n+1} \geq m \tilde{Z}_n.$$

On pose $Y_n = \frac{\tilde{Z}_n}{m^n}$. La suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{G}_n -sous-martingale. Remarquons l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}_n] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[Z_{n-i}^{(i)}] = \sum_{i=0}^n a_i m^{n-i}.$$

D'où $\mathbb{E}[Y_n] = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{m^i}$. Par l'équation 3, la sous-martingale est uniformément bornée dans L_1 , donc converge presque-sûrement vers une variable aléatoire intégrable. \square

On peut également imaginer qu'il y ait un nombre aléatoire d'individus immigrants à chaque génération.

Définition 1.4. Pour toute suite de variables aléatoires i.i.d. $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit le processus de Galton-Watson avec immigration A , de loi de reproduction P , par :

$$\tilde{Z}_0 = 0, \quad \tilde{Z}_n = \sum_{i=0}^n Z_{n-i}^{(i)}$$

où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $Z^{(i)}$ est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction P , initialisé à $Z_0^{(i)} = A_i$. Les processus $(Z^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ sont supposés indépendants.

On peut alors généraliser la Proposition 1.11.

Proposition 1.12. Soit \tilde{Z} un processus de Galton-Watson avec immigration A , de loi de reproduction sur-critique. Si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{m^n} < +\infty \text{ presque-sûrement,}$$

alors $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge presque-sûrement vers une variable aléatoire finie presque-sûrement.

Démonstration. Notons $L = \{\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n < +\infty\}$; l'objectif est de montrer que $\mathbb{P}(L) = 1$.

Pour tout $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on définit la mesure $\mathbb{P}_{a,n}$ comme suit :

$$\forall C \in \mathcal{G}_n, \quad \mathbb{P}_{a,n}(C) = \mathbb{P}(C \mid \bigcap_{k=0}^n \{A_k = a_k\}).$$

Cette mesure n'est donc définie que sur \mathcal{G}_n . Néanmoins, cette famille de mesure vérifie $\mathbb{P}_{a,n} = (\mathbb{P}_{a,n+1})|_{\mathcal{G}_n} = \dots = (\mathbb{P}_{a,n+k})|_{\mathcal{G}_n}$. On admet qu'on peut l'étendre en une mesure \mathbb{P}_a sur \mathcal{G} , vérifiant $(\mathbb{P}_a)|_{\mathcal{G}_n} = \mathbb{P}_{a,n}$. Pour tout $C \in \mathcal{G}_n$, on a :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{E}[\mathbb{P}_A(C)], \tag{4}$$

où $\mathbb{P}_A(C) = \mathbb{P}_\cdot(C) \circ A$. En effet,

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_a(C) \times \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n \{A_k = a_k\}\right).$$

Or, \mathcal{G} est engendrée par le π -système $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$. L'équation 4 reste ainsi valable sur toute la tribu \mathcal{G} . En $C = L \in \mathcal{G}$, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{m^n} < +\infty$ presque-sûrement, on a pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$\mathbb{P}_{A(\omega)}(L) = 1$. En effet, $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus de Galton-Watson avec immigration $(A_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}_{A(\omega)})$. La Proposition 1.11 nous permet donc d'affirmer que $\mathbb{P}_{A(\omega)}(L) = 1$. D'où $\mathbb{P}(L) = \mathbb{E}[\mathbb{P}_{A(\omega)}(L)] = 1$. \square

Ce critère nous permet de déterminer, selon la loi d'immigration, si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers une limite, finie ou non. Ce critère est dû à Seneta dans [Sen70].

Théorème 1.4. *Soit $(\tilde{Z}_n)_{n \geq 0}$ un processus de Galton-Watson avec immigration A , tel que $m \in]1, +\infty[$. Alors on a la dichotomie suivante :*

1. *Si $\mathbb{E}[\ln_+(A_1)] < +\infty$, alors $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie presque sûrement.*
2. *Si $\mathbb{E}[\ln_+(A_1)] = +\infty$, alors $\limsup_{n \rightarrow +\infty} Y_n = +\infty$ presque sûrement.*

Démonstration. On commence par montrer le premier point. Les variables aléatoires $(\ln_+(A_k))_{k \geq 1}$ sont i.i.d. et intégrables, donc par la loi forte des grands nombres on a la convergence presque-sûre :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln_+(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\ln_+(A_1)].$$

On remarque que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln_+(A_k) = \frac{\ln_+(A_n)}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \ln_+(A_k).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln_+(A_n)}{n} = 0.$$

En particulier, pour tout $\epsilon \in]0, \ln(m)[$, et n assez grand on a presque-sûrement :

$$\frac{A_n}{m^n} < e^{n(\epsilon - \ln(m))},$$

donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{m^n}$ est presque-sûrement convergente. Par la Proposition 1.12, on conclut le premier point.

Pour le second point, on a $\mathbb{E}[\ln_+(A_1)] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\ln_+(A_1) \geq n) = +\infty$. On note $B_n = \{\ln_+(A_n) \geq n\}$; et comme les $(A_n)_{n \geq 0}$ sont i.i.d. :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\ln_+(A_1) \geq n) = +\infty.$$

Les événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants, donc par le second lemme de Borel-Cantelli ([Dur19][Theorem 2.3.7]), $\mathbb{P}(B_n \text{ i.o.}) = 1$. Comme, pour n assez grand, $\tilde{Z}_n \geq A_n \geq \ln_+(A_n)$, on a bien $\limsup_{n \rightarrow +\infty} Y_n = +\infty$. \square

Proposition 1.13. *Soit \tilde{Z} un processus de Galton-Watson avec immigration A . On note f la fonction génératrice de la loi d'immigration, et g celle de la loi de reproduction. Alors, pour tout $s \in [0, 1]$:*

$$\mathbb{E}[s^{\tilde{Z}_{n+1}} | \mathcal{G}_n] = f(s) \times g(s)^{\tilde{Z}_n}.$$

Démonstration. On a pour tout $s \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E}[s^{\tilde{Z}_{n+1}} | \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{n+1} s^{Z_{n+1-i}^{(i)}} | \mathcal{F}_n\right] = \prod_{i=0}^{n+1} \mathbb{E}[s^{Z_{n+1-i}^{(i)}} | \mathcal{F}_n],$$

Car les $(Z_{n+1-i}^{(i)})_{0 \leq i \leq n+1}$ sont indépendantes conditionnellement à \mathcal{F}_n . Comme $Z_0^{(n+1)}$ est indépendante de \mathcal{F}_n :

$$\mathbb{E}[s^{\tilde{Z}_{n+1}} | \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[s^{Z_0^{(n+1)}}] \prod_{i=0}^n \mathbb{E}[s^{Z_{n+1-i}^{(i)}} | \mathcal{F}_n] = f(s) \times \prod_{i=0}^n \mathbb{E}[s^{Z_{n+1-i}^{(i)}} | \mathcal{F}_n].$$

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Z_{n+1-i}^{(i)}$ est la $(n+1-i)$ -ième étape d'un processus de Galton-Watson, donc $\mathbb{E}[s^{Z_{n+1-i}^{(i)}} | \mathcal{F}_n] = g(s)^{Z_{n-i}^{(i)}}$. D'où :

$$\mathbb{E}[s^{\tilde{Z}_{n+1}} | \mathcal{G}_n] = f(s) \times g(s)^{\sum_{i=0}^n Z_{n-i}^{(i)}} = f(s) \times g(s)^{\tilde{Z}_n}.$$

□

2 Arbres de Galton-Watson

2.1 Formalisme des arbres

On a vu (Figure 1) que l'on peut représenter l'évolution d'une population dont le nombre d'individus suit un processus de Galton-Watson par un arbre. La visualisation en arbre nous donne plus d'informations sur la population que juste la donnée de $(Z_n)_{n \geq 0}$, et nous permettra de développer une preuve élégante du Théorème 1.3, initialement exposée dans l'article [RLP95].

Nous allons définir un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ explicitement, l'espace des arbres. Ce formalisme est tiré du chapitre 2 du livre de Zhan Shi [Shi15], « Branching Random Walks ».

On note $\mathcal{U} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^{*n}$, avec la convention $\mathbb{N}^{*0} = \{\emptyset\}$. C'est l'ensemble des uplets d'entiers strictement positifs. On définit la concaténation sur les éléments de \mathcal{U} :

$$\forall u = (u_1, \dots, u_k), v = (v_1, \dots, v_l) \in \mathcal{U}, uv := (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l).$$

avec la convention $u\emptyset = \emptyset u = u$. On définit également la longueur d'un k -uplet $u \in \mathcal{U}$ par $|u| = k$. On pose aussi $|\emptyset| = 0$.

Définition 2.1. Un arbre est une partie ω de \mathcal{U} vérifiant les 3 conditions suivantes :

1. $\emptyset \in \omega$
2. Pour tout $u \in \mathcal{U}$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, si $ui \in \omega$ alors $u \in \omega$.
3. Pour tout $u \in \omega$, il existe un entier $N_u(\omega)$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$ui \in \omega \iff i \leq N_u(\omega).$$

Concrètement, si on souhaite dessiner un arbre, on note \emptyset l'individu initial, et on numérote les individus de haut en bas de la manière suivante : le i -ième enfant de l'individu u est encodé avec l'élément $ui \in \mathcal{U}$.

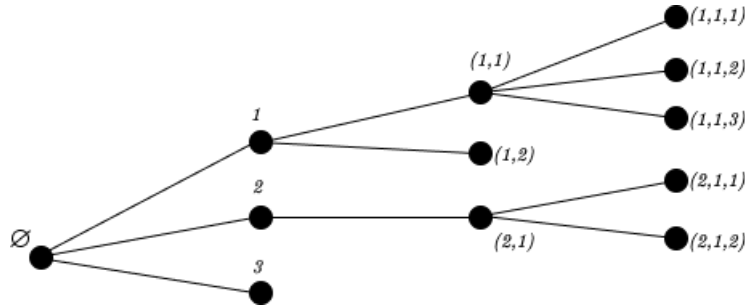


FIGURE 4 – Un exemple d'arbre, avec le formalisme introduit ci-dessus

La condition 1 impose qu'un arbre a un individu initial, et un seul. La seconde impose que si un individu est dans l'arbre, alors son parent aussi. Quant à la troisième, elle garantit à la fois qu'un individu a un nombre fini d'enfants, mais aussi qu'on peut les numérotter de 1 à un certain entier $N_u(\omega)$, sans sauter de nombre.

On définit l'ensemble des arbres :

$$\Omega = \{\omega \subset \mathcal{U}, \omega \text{ est un arbre}\}.$$

Remarquons que cet ensemble n'est pas dénombrable, car il contient $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. En effet, toute partie $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ s'écrit $B = \{b_n, n \geq 0\}$, et s'encode par l'arbre, où l'individu \emptyset a b_0 enfants, dont le premier a b_1 enfants et les autres n'en ont pas, etc :

$$\omega = \{\emptyset, 1, \dots, b_0, (1, 1), \dots, (1, b_1), (1, 1, 1), \dots, (1, 1, b_2), \dots\}.$$

Il ne semble donc pas très raisonnable de prendre comme tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. On pose, pour tout $u \in \mathcal{U}$:

$$\Omega_u = \{\omega \in \Omega \mid u \in \omega\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des arbres qui contiennent l'individu u . Remarquons que $\Omega_\emptyset = \Omega$ (par 1. de la Définition 2.1). On définit la tribu suivante sur Ω :

$$\mathcal{F} = \sigma(\Omega_u, u \in \mathcal{U}).$$

Ainsi que la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(\Omega_u, u \in \mathcal{U}, |u| \leq n)$ qui vérifie :

$$\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n\right).$$

En effet, $\{\Omega_u, u \in \mathcal{U}\} \subset \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ car pour tout $u \in \mathcal{U}$, $\Omega_u \in \mathcal{F}_{|u|}$. Et de plus, on a clairement $\{\Omega_u, u \in \mathcal{U}, |u| \leq n\} \subset \mathcal{F}_n$.

Pour tout $u \in \mathcal{U}$, on définit la translation :

$$\begin{aligned} T_u &: \Omega_u \longrightarrow \Omega \\ \omega &\longmapsto \{v \in \mathcal{U}, uv \in \omega\}. \end{aligned}$$

$T_u(\omega)$ est l'arbre obtenu en ne gardant de ω que les branches issues de u . Par exemple, sur l'arbre ω de la figure 3, on a :

$$T_{(1,1)}(\omega) = \{\emptyset, 1, (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}.$$

De plus, on a $T_u^{-1}(\Omega_v) = \Omega_{uv}$, entraînant que T_u est bien mesurable pour la tribu trace de \mathcal{F} sur Ω_u .

Afin d'étudier les générations d'un arbre ω , on introduit l'application :

$$\begin{aligned} z_n &: (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathcal{P}_f(\mathbb{N}^{*n}), \mathcal{P}(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}^{*n}))) \\ \omega &\longmapsto \{u \in \Omega, |u| = n\}. \end{aligned}$$

qui donne la n -ième génération de ω , avec la notation $\mathcal{P}_f(E)$ pour l'ensemble des parties finies de E . On a alors l'égalité $\mathcal{F}_n = \sigma(z_0, \dots, z_n)$, et les z_n sont bien mesurables.

On souhaite désormais probabiliser l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) . La construction suivante est issue

d'un article de Jacques Neveu [Nev86] :

Proposition 2.1. *Pour toute mesure de probabilité $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \delta_k$ sur \mathbb{N} , il existe une unique probabilité \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{F}) telle que :*

1. $N := N_\emptyset \sim P$.
2. Pour tout entier k , conditionnellement à l'événement $\{N = k\}$, les variables aléatoires $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont i.i.d. de loi \mathbb{P} .

Démonstration. On introduit un espace plus grand : $\Omega^* = \mathbb{N}^{\mathcal{U}}$, muni de la tribu cylindrique \mathcal{F}^* , et (résultat d'existence admis) de la mesure $\mathbb{P}^* = P^{\otimes \mathcal{U}}$, qui coïncide avec la mesure produit de P sur les produits finis de parties de \mathbb{N} . Un élément ω^* de cet espace est une suite d'entiers $(\omega_u^*)_{u \in \mathcal{U}}$; où $N_u^*(\omega^*) := \omega_u^*$ correspond au nombre d'enfants de l'individu u dans ω^* . On associe à chaque individu $u \in \mathcal{U}$ une descendance, sur une seule génération. Certains éléments de Ω^* encodent la donnée d'un arbre comme défini précédemment (Définition 2.1), mais la plupart ne sont pas des issues possibles de la création d'un arbre. La Figure 5 représente un exemple d'élément de Ω^* .

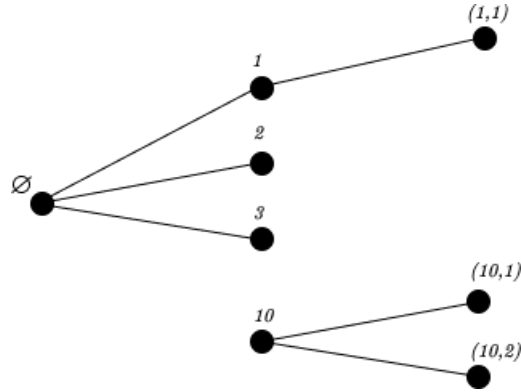


FIGURE 5 – Ici, $\omega_\emptyset^* = 3$, $\omega_1^* = 1$, $\omega_{10}^* = 2$, et les autres ω_u^* sont nuls.

On définit l'application :

$$G : (\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$$

$$\omega^* \longmapsto \{u \in \mathcal{U}, \sigma_u(\omega^*) < +\infty\},$$

où pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$, σ_u est défini par récurrence sur la longueur de u . C'est-à-dire que $\sigma_u(\omega^*) = +\infty$ si $N_{(u_1, \dots, u_{n-1})}^*(\omega^*) < u_n$ (lorsque u n'est pas censé être né) et vaut $\sigma_{(u_1, \dots, u_{n-1})}(\omega^*) + 1$ sinon. On peut voir σ_u comme la génération de naissance de u , qui vaut $+\infty$ lorsque u n'est pas né. Ainsi, $G(\omega^*)$ est l'ensemble des individus de ω^* qui sont nés, et c'est bien un arbre.

On définit alors \mathbb{P} comme étant la loi de G . Grâce à l'identité suivante :

$$N_u^* = N_u \circ G, \text{ sur } G^{-1}(\Omega_u),$$

on trouve bien $\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}^*(N_\emptyset^* = k) = p_k$.

Pour montrer le second point, on introduit des variables aléatoires similaires aux translations. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\omega^* \in \Omega^*$, on pose $T_i^*(\omega^*) = (\omega_{iv})_{v \in \mathcal{U}}$; c'est-à-dire que $N_v^*(T_i^*(\omega^*)) = N_{iv}^*(\omega^*)$. Ces translations vérifient l'identité suivante :

$$G \circ T_i^* = T_i \circ G, \text{ sur } G^{-1}(\{N \geq i\});$$

et sont i.i.d., de loi \mathbb{P}^* . Comme elles sont indépendantes de N_\emptyset^* , on a, pour tous $k \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^k \{T_i \in A_i\}, N = k\right] &= \mathbb{P}^*\left[\bigcap_{i=1}^k \{T_i \circ G \in A_i\}, N \circ G = k\right] \\ &= \mathbb{P}^*\left[\bigcap_{i=1}^k \{G \circ T_i^* \in A_i\}, N_\emptyset^* = k\right] \\ &= p_k \prod_{i=1}^k \mathbb{P}^*(A_i). \end{aligned}$$

Ceci qui conclut l'existence de \mathbb{P} .

Pour l'unicité, on suppose qu'on ait deux telles probabilités $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$. Alors pour montrer qu'elles coïncident sur \mathcal{F} , on peut se contenter de le montrer sur \mathcal{F}_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$, et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ est un π -système. De plus, on remarque que $\mathcal{F}_n = \sigma(\Pi_n)$, où

$$\Pi_n = \left\{ \bigcap_{i=1}^n z_i^{-1}(A_i), (A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^{*n}) \right\} \quad (5)$$

est un π -système. Il suffit de vérifier que \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 sont égales sur les événements $A = \{z_0 = a_0, \dots, z_n = a_n\}$, par dénombrabilité de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}^{*n})$. On peut supposer que $a = \bigcup_{i=0}^n a_i$ est un arbre (sinon $A = \emptyset$). L'ensemble A est alors l'ensemble des arbres dont les n premières générations coïncident avec a . Si on note $\pi_n(\omega)$ la restriction de ω à ses n premières générations, on a alors :

$$A = \{N = N(a), \pi_{n-1} \circ T_1 = T_1(a), \dots, \pi_{n-1} \circ T_{N(a)} = T_{N(a)}\}.$$

Par le premier point, $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$. □

On introduit désormais les variables aléatoires entières $Z_n : \omega \longrightarrow |z_n(\omega)|$, mesurables par composition d'applications mesurables.

Lemme 2.1. *Pour tout $n \geq 0$:*

$$Z_{n+1} = \sum_{u \in z_n} Z_1 \circ T_u = \sum_{i=1}^{Z_1} Z_n \circ T_i.$$

De plus, pour tout $s \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} | \mathcal{F}_n] = g(s)^{Z_n}.$$

Démonstration. Les deux premières égalités découlent directement d'une réécriture de z_{n+1} :

$$z_{n+1} = \bigsqcup_{u \in z_n} \{u.i \mid i \leq N_u\} = \bigsqcup_{k \in z_1} \{k.u \mid u \in z_n \circ T_k\}.$$

Pour la dernière, on a pour tout $s \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{u \in z_n} s^{Z_1 \circ T_u} | \mathcal{F}_n\right].$$

Or, pour tout $A = \{z_0 = a_0, \dots, z_n = a_n\} \in \mathcal{F}_n$, de probabilité non-nulle, on a :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{u \in z_n} s^{Z_1 \circ T_u} \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}\left[\prod_{u \in z_n} s^{Z_1 \circ T_u} | A\right] = \mathbb{P}(A) \prod_{u \in a_n} \mathbb{E}[s^{Z_1 \circ T_u} | A],$$

car les $(T_u)_{u \in a_n}$ sont indépendantes sachant A . De plus, la loi de T_u sachant A est \mathbb{P} , donc :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{u \in z_n} s^{Z_1 \circ T_u} \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{P}(A) g(s)^{|a_n|} = \mathbb{E}[g(s)^{Z_n} \mathbb{1}_A].$$

□

Proposition 2.2. *Le processus $(Z_n)_{n \geq 0}$ a la loi d'un processus de Galton-Watson initialisé en 1 et de loi de reproduction P .*

Démonstration. Pour tout $B = \{Z_0 = b_0, \dots, Z_n = b_n\}$ de probabilité non-nulle,

$$\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}} | B] = \mathbb{E}[g(s)^{Z_n} | B] = g(s)^{b_n}.$$

La loi de Z_{n+1} sachant B est donc la même que celle de \tilde{Z}_{n+1} sachant $\tilde{B} = \{\tilde{Z}_0 = b_0, \dots, \tilde{Z}_n = b_n\}$. Où $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus de Galton-Watson initialisé en 1 et de loi de reproduction P . □

2.2 Arbres de Galton-Watson à taille biaisée

Lorsque m est finie, on peut ainsi de nouveau introduire la martingale $Y_n = \frac{Z_n}{m^n}$, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette propriété est plus forte qu'être une martingale relativement à sa filtration canonique. On a encore la convergence presque sûre vers Y_∞ . De plus, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(Y_n) = 1$ donc peut définir la mesure de densité Y_n . C'est à dire, pour tout $A \in \mathcal{F}_n$:

$$\mathbb{Q}_n(A) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Y_n].$$

Proposition 2.3 ([Shi15]). *Il existe une mesure \mathbb{Q} sur (Ω, \mathcal{F}) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n} = \mathbb{Q}_n$.*

Démonstration. Admise. On observe tout de même que, pour tout $n, m \geq 0$, pour tout $A \in \mathcal{F}_n$:

$$\mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{Q}_{n+1}(A) = \dots = \mathbb{Q}_{n+m}(A)$$

par la propriété de martingale. On peut ainsi définir $\mathbb{Q}(A)$ pour tout A dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. Mais cela ne

garantie pas l'existence d'une telle mesure sur $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$. □

Ce changement de mesure nous permet de prouver le Théorème 1.3 ; c'est l'objectif de cette section.

Une propriété remarquable de cette nouvelle mesure \mathbb{Q} est que Z_n est strictement positive \mathbb{Q} -presque-sûrement :

$$\mathbb{Q}(Z_n > 0) = \frac{1}{m^n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Z_n > 0} Z_n] = \frac{1}{m^n} \mathbb{E}[Z_n] = 1.$$

Sous \mathbb{Q} , la population ne s'éteint donc jamais. En effet, si on regarde la loi de Z_1 sous \mathbb{Q} , on trouve :

$$\mathbb{Q}(Z_1 = k) = \frac{1}{m} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Z_1 = k} Z_1],$$

car $\{Z_1 = k\}$ est dans \mathcal{F}_1 . D'où :

$$\mathbb{Q}(Z_1 = k) = \frac{kp_k}{m}.$$

On note $\hat{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{kp_k}{m} \delta_k$ cette loi, appelée loi de reproduction biaisée. On a bien $\hat{P}(0) = 0$; un individu suivant cette loi est assuré d'avoir au moins un enfant. Le lemme suivant permet de mieux comprendre ce que change concrètement la mesure \mathbb{Q} à un arbre.

Lemme 2.2 ([Shi15]). *Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, pour tous $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}_n$,*

$$\mathbb{Q}(Z_1 = k, T_1 \in A_1, \dots, T_k \in A_k) = \mathbb{Q}(Z_1 = k) \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\mathbb{Q}(A_i) \prod_{j=1, j \neq i}^k \mathbb{P}(A_j) \right).$$

On a à gauche la probabilité (sous \mathbb{Q}) d'avoir k individus à la génération 1, puis que les k arbres issus de ces individus ait un futur quelconque (sous \mathbb{Q}). Et à droite, la probabilité d'avoir k individus en suivant une loi de reproduction biaisée, et que, uniformément parmi ces enfants, un seul ait un futur sous \mathbb{Q} , là où les autres auront un futur classique suivant un arbre de Galton-Watson.

Ceci permet de définir les arbres de Galton-Watson biaisés :

On part avec un individu (\emptyset), qui donne naissance à k enfants en suivant la loi biaisée. Un de ses enfants, choisi uniformément, hérite de cette loi de reproduction biaisée, les autres quant à eux ont pour loi de reproduction P . Et on recommence sur cette génération pour obtenir la génération 2, etc. Ceci nous fournit des arbres qui ne s'éteignent jamais, car la loi biaisée ne vaut jamais 0. La lignée des individus suivant la loi biaisée \hat{P} se distingue naturellement des autres lignées, on dira que ces individus sont marqués, et va nous permettre de mieux comprendre certains comportement d'arbres de Galton-Watson classiques.

Démonstration. Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}_n$. On pose $B = \{T_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{T_k \in A_k\}$. On a alors, comme

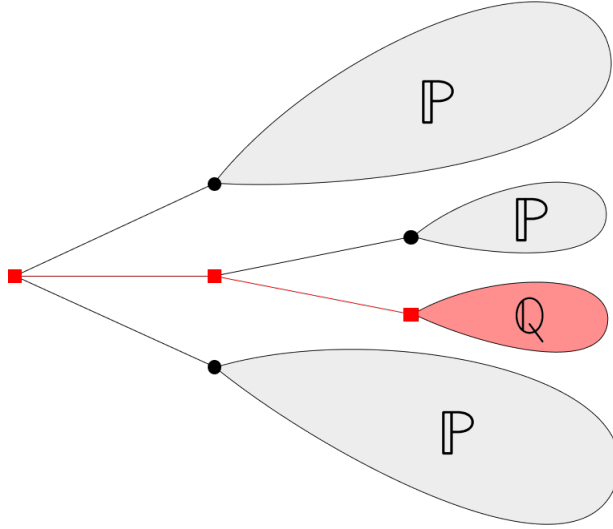


FIGURE 6 – Un arbre biaisé, la lignée des individus marqués est notée en rouge.

Z_1 et T_1, \dots, T_k sont \mathcal{F}_n -mesurables :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}(Z_1 = k, B) &= \mathbb{E}\left[\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}} \mathbb{1}_{\{Z_1=k\}} \mathbb{1}_B\right] = \frac{p_k}{m^{n+1}} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mathbb{1}_B | Z_1 = k] \\
 &= \frac{p_k}{m^{n+1}} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k Z_n \circ T_i \mathbb{1}_B | Z_1 = k\right] \\
 &= \frac{p_k}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[Z_n \circ T_i \mathbb{1}_B | Z_1 = k].
 \end{aligned}$$

Or, par indépendance des $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ conditionnellement à $Z_1 = k$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}(Z_1 = k, B) &= \frac{p_k}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T_i \in A_i} Z_n \circ T_i | Z_1 = k] \prod_{j=1, j \neq i}^k \mathbb{P}(A_j) \\
 &= \frac{p_k}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^k m^n \mathbb{Q}(A_i) \prod_{j=1, j \neq i}^k \mathbb{P}(A_j), \text{ car la loi de } T_i \text{ sachant } Z_1 = k \text{ est } \mathbb{P}, \\
 &= \frac{kp_k}{m} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\mathbb{Q}(A_i) \prod_{j=1, j \neq i}^k \mathbb{P}(A_j) \right).
 \end{aligned}$$

□

L'intérêt principal de l'étude des arbres biaisés est que ces derniers permettent de comprendre finement, dans le cas d'un Galton-Watson sur-critique, quand l'égalité suivante est vraie :

$$\{Y_\infty = 0\} = \{T < +\infty\}.$$

En effet, le théorème suivant ([Dur19][Théorème 4.3.5, page 227]) nous permet de relier le comporte-

ment limite de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous \mathbb{Q} au fait que $Y_\infty > 0$ sous \mathbb{P} .

Théorème 2.1. Soit $\tilde{Y}_\infty = \limsup_{n \rightarrow +\infty} Y_n$. Pour tout $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[Y_\infty \mathbb{1}_A] + \mathbb{Q}(A \cap \{\tilde{Y}_\infty = +\infty\}).$$

Démonstration. On introduit une nouvelle mesure $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{P} + \mathbb{Q}}{2}$ sur Ω . Pour tout $n \geq 0$, les probabilités $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}$ et $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_n}$ sont absolument continues par rapport à $\mathbb{T}_n = \mathbb{T}|_{\mathcal{F}_n}$. On peut donc définir les dérivées de Radon-Nikodym positives :

$$W_n = \frac{d\mathbb{P}_n}{d\mathbb{T}_n}$$

$$V_n = \frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{T}_n}.$$

Ce sont des \mathcal{F}_n -martingales. Tout d'abord, pour tout $A \in \mathcal{F}_n$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{T}}[W_{n+1} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{T}_{n+1}}[W_{n+1} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{n+1}}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{T}}[W_n \mathbb{1}_A].$$

De même pour V_n . Ainsi, en $A = \Omega$, on trouve que W_n et V_n sont intégrables. Ce sont donc des martingales. De plus, elles vérifient :

$$W_n + V_n = 2 \text{ } \mathbb{T}\text{-presque sûrement.}$$

En effet, pour tout $A \in \mathcal{F}_n$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{T}}[\mathbb{1}_A] = \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{Q}(A)}{2} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{T}}[\mathbb{1}_A(W_n + V_n)]}{2}.$$

D'où :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{T}}[\mathbb{1}_A \left(\frac{W_n + V_n}{2} - 1 \right)] = 0.$$

En appliquant à $A = \{ \frac{W_n + V_n}{2} - 1 \geq 0 \}$ et à A^c , on trouve :

$$\mathbb{1}_A \left(\frac{W_n + V_n}{2} - 1 \right) + \mathbb{1}_{A^c} \left(\frac{W_n + V_n}{2} - 1 \right) = 0, \text{ } \mathbb{T}\text{-p.s.}$$

Et donc $W_n + V_n = 2$ \mathbb{T} -p.s. Comme elles sont positives, elles sont alors bornées, donc convergent \mathbb{T} -p.s. vers W et V respectivement, toutes deux intégrables. On montre désormais que $W = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{T}}$ et $V = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{T}}$. Comme $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n)$, où $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ est un π -système, il suffit de le vérifier pour $A \in \mathcal{F}_n$. Or on a, pour tout $k \geq 0$:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{T}}[V_{n+k} \mathbb{1}_A],$$

par la propriété de martingale. Par convergence dominée, on fait tendre k vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{T}}[V \mathbb{1}_A].$$

De même, $W = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{T}}$. On souhaiterait désormais pour conclure montrer que $\tilde{Y}_\infty = \frac{V}{W}$. Pour cela, on pose $B = \{W > 0\}$. On a alors, pour tout $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{T}}[V\mathbb{1}_{A \cap B}] + \mathbb{Q}(A \cap B^c) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{V}{W}\mathbb{1}_{A \cap B}\right] + \mathbb{Q}(A \cap B^c). \quad (6)$$

Or, $Y_n \stackrel{\mathbb{P}\text{-p.s.}}{=} \frac{V_n}{W_n}$. En effet, comme $W_n = W_n\mathbb{1}_{W_n > 0}$, W_n est strictement positive \mathbb{P} -p.s. Ainsi, pour tout $D \in \mathcal{F}_n$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[\mathbb{1}_D \frac{V_n}{W_n}] = \mathbb{E}_{\mathbb{T}_n}[\mathbb{1}_D V_n] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[\mathbb{1}_D].$$

Donc on a bien $\frac{V_n}{W_n} \stackrel{\mathbb{P}\text{-p.s.}}{=} \frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}_n} \stackrel{\mathbb{P}\text{-p.s.}}{=} Y_n$, par presque-sûre unicité de la dérivée de Radon-Nikodym.

Ainsi,

$$Y_n = \frac{V_n}{W_n} = \frac{2}{W_n} - 1 \text{ } \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Comme $\mathbb{Q}_n \ll \mathbb{P}_n$, on a également $Y_n \stackrel{\mathbb{Q}\text{-p.s.}}{=} \frac{V_n}{W_n}$. On en déduit que $\{\tilde{Y}_\infty < +\infty\} \stackrel{\mathbb{P}\text{-p.s.}}{=} B$. Mais sous \mathbb{P} , $\tilde{Y}_\infty = Y_\infty$, qui est finie presque sûrement. On trouve ainsi que $\mathbb{P}(B) = 1$. L'équation 6 se réécrit :

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y_\infty \mathbb{1}_A] + \mathbb{Q}(A \cap \{\tilde{Y}_\infty = +\infty\}).$$

□

Ce résultat nous permet d'étudier deux cas distincts :

1. $\tilde{Y}_\infty = +\infty$ \mathbb{Q} -presque sûrement $\iff Y_\infty = 0$ \mathbb{P} -presque sûrement.
2. $\tilde{Y}_\infty < +\infty$ \mathbb{Q} -presque sûrement $\iff \mathbb{E}[Y_\infty] = 1$. Et dans ce cas, par la Proposition 1.9, $\{Y_\infty = 0\} = \{T < +\infty\}$ \mathbb{P} -presque sûrement.

On est donc amené à étudier $(Y_n)_{n \geq 0}$ sous \mathbb{Q} , c'est-à-dire à étudier le comportement asymptotique d'un arbre de Galton-Watson biaisé. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 2.4. *La loi du processus $(Z_n - 1)_{n \geq 0}$ sous \mathbb{Q} est la même que celle d'un processus de Galton-Watson avec immigration, pour la loi de reproduction P , et la loi d'immigration $\text{Loi}_{\mathbb{Q}}(Z_1 - 1) = \hat{P} - 1$.*

Démonstration. On utilise encore une fois les fonctions génératrices. Nous allons montrer que pour tout $s \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[s^{Z_{n+1}-1} | \mathcal{F}_n] = \frac{g'(s)}{m} \times g(s)^{Z_n-1}. \quad (7)$$

Pour tout $A \in \mathcal{F}_n$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A s^{Z_{n+1}-1}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{m^{n+1}} Z_{n+1} s^{Z_{n+1}-1} \mathbb{1}_A\right].$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1}s^{Z_{n+1}-1}|\mathcal{F}_n] &= \sum_{u \in z_n} \mathbb{E}[(\prod_{v \in z_n, v \neq u} s^{Z_1 \circ T_v}) \times Z_1 \circ T_u s^{Z_1 \circ T_u - 1} | \mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{u \in z_n} \mathbb{E}[s^{Z_1}]^{Z_n - 1} \times \mathbb{E}[Z_1 s^{Z_1 - 1}] \\
&= Z_n \times g(s)^{Z_n - 1} \times g'(s),
\end{aligned}$$

car les translations $(T_u)_{u \in z_n}$ sont i.i.d. conditionnellement à \mathcal{F}_n , de loi \mathbb{P} . Ainsi :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[s^{Z_{n+1}-1} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\frac{Z_n}{m^n} \frac{g'(s)}{m} \times g(s)^{Z_n-1} \mathbb{1}_A].$$

Comme la variable aléatoire $\frac{g'(s)}{m} \times g(s)^{Z_n-1}$ est \mathcal{F}_n -mesurable, on a bien l'égalité 7. Dans cette égalité, on reconnaît le résultat de la Proposition 1.13, avec $f(s) = \frac{g'(s)}{m}$ qui est exactement la fonction génératrice (sous \mathbb{Q}) de $Z_1 - 1$. La loi du processus $(Z_n - 1)_{n \geq 0}$ sous \mathbb{Q} est caractérisée par l'égalité 7, ce qui conclut la preuve. \square

Remarque. Avec la visualisation de la construction d'un arbre biaisé du Lemme 2.2, le nombre d'individu immigrants de la génération $n + 1$ d'un arbre de Galton-Watson biaisé correspond au nombre d'enfants de l'individu marqué de la génération n . De plus, $Z_{n+1} - 1$ correspond au nombre d'individu de la $n + 1$ -ième génération de l'arbre sans l'individu marqué. Dans la Figure 6, on a 2 immigrants à la génération 1 et 1 à la génération 2.

On peut enfin démontrer le Théorème 1.3.

Démonstration du Théorème 1.3. On sait par le Théorème 1.4 que, lorsque $m \in]1, +\infty[$:

$$\tilde{Y}_{\infty} < +\infty \quad \mathbb{Q}\text{-presque sûrement} \iff \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\ln_+(Z_1 - 1)] < +\infty.$$

Ce qui est équivalent à $m\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\ln_+(Z_1)] < +\infty$. Comme $m\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\ln_+(Z_1)] = \mathbb{E}[Z_1 \ln_+(Z_1)]$, on a :

$$\tilde{Y}_{\infty} < +\infty \quad \mathbb{Q}\text{-presque sûrement} \iff \mathbb{E}[Z_1 \ln_+(Z_1)] < +\infty.$$

Or le Théorème 2.1 implique que :

$$\mathbb{E}[Y_{\infty}] = 1 \iff \tilde{Y}_{\infty} < +\infty \quad \mathbb{Q}\text{-presque sûrement}.$$

Donc 1. \iff 2.. La Proposition 1.9 montre que 1. \implies 3.. Pour l'inclusion réciproque, on sait alors que $\mathbb{P}(Y_{\infty} > 0) > 0$. D'où, par le Théorème 2.1 $\mathbb{Q}(\tilde{Y}_{\infty} < +\infty) > 0$. Donc, par le Théorème 1.4, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\ln_+(Z_1 - 1)] < +\infty$. \square

3 Processus de Crump-Mode-Jagers (CMJ)

Les processus CMJ sont une forme plus complexe des processus de Galton-Watson, mais sont plus réalistes. Dans ce modèle, les individus donnent naissance au cours de leur vie à plusieurs enfants, à des dates précises. Ceci change l'échelle de temps, qui compte plutôt les années que les générations, car ces dernières peuvent désormais se superposer. Nous allons suivre les notations de l'article [JS08], et, de la même manière que précédemment, nous expliciterons la construction d'arbres modélisant une population qui suit ce processus.

3.1 Définitions

Les individus seront décrits par leurs ancêtres (comme dans le cas des arbres de Galton-Watson), mais également par leur descendance, c'est-à-dire les âges où ils ont des enfants.

On définit $C = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathbb{N}_{\uparrow}^{*k}$, l'ensemble des uplets croissants d'entiers. Il correspond à toutes les possibilités de descendance pour un individu, disons l'individu initial. Un uplet $(n_1, \dots, n_k) \in C$ correspond aux différents âges où l'individu donne naissance à un enfant. Les entiers peuvent être égaux, et cela correspond à plusieurs enfants nés au même instant. Par exemple, la descendance $(2, 5, 5, 15)$ correspond à un individu qui aura dans sa vie 4 enfants. Un lorsqu'il aura 2 ans, deux autres à 5 ans et un dernier à 15 ans.

On se donne autant de copies de C que d'individus possibles sur notre arbre. C'est-à-dire que pour tout $u \in \mathcal{U}$, on pose $C_u = C$. Ceci nous permet de définir l'ensemble :

$$\Omega_C^* = \prod_{u \in \mathcal{U}} C_u = C^{\mathcal{U}}.$$

Un élément ω_C^* de Ω_C^* est une suite de descendance, indiquée par tous les individus possibles :

$$\omega_C^* = (c_u)_{u \in \mathcal{U}},$$

où $c_u \in C_u$ (avec la notation $C_{\emptyset} = C$).

On munit l'ensemble Ω_C^* de la tribu cylindrique associée aux tribus discrètes sur les C_u , ce qui nous fournit un espace mesurable $(\Omega_C^*, \mathcal{F}_C^*)$. Afin de probabiliser cet espace, on commence par introduire une mesure de probabilité sur $(C, \mathcal{P}(C))$. On se donne donc des réels :

$$p_0, (p_k(n_1, \dots, n_k))_{k \geq 1, 1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k < +\infty}.$$

Dans notre modèle, p_0 représente la probabilité de ne pas avoir d'enfants, et $p_k(n_1, \dots, n_k)$ celle d'avoir k enfants, aux dates $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la somme de tous ces entiers fait 1, nous fournissant une loi de probabilité P_C sur $(C, \mathcal{P}(C))$. On admet le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Il existe une mesure de probabilité \mathbb{P}_C^* sur $(\Omega_C^*, \mathcal{F}_C^*)$ telle que pour tout n et pour toute famille d'évènements $(D_{u_k})_{1 \leq k \leq n}$:*

$$\mathbb{P}_C^* \left(\prod_{1 \leq k \leq n} D_{u_k} \right) = \prod_{1 \leq k \leq n} P_C(D_{u_k}).$$

Démonstration. Admise. □

On définit également sur cet espace certaines variables aléatoires. Pour tout $c = (n_1, \dots, n_k) \in C$:

1. $N^*(c) := k$.
2. Pour tout $i \geq 1$:

$$\tau_i^*(c) := \begin{cases} n_i & \text{si } i \leq k, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Qui sont respectivement le nombre d'enfants d'un individu, et les différents âges où cet individu des enfants. Ceci permet d'introduire la date de naissance de l'individu $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$:

$$\forall \omega_C^* \in \Omega_C^* : \quad \sigma_u^*(\omega_C^*) := \tau_{u_1}^*(c_\emptyset) + \sum_{i=2}^n \tau_{u_i}^*(c_{(u_1, \dots, u_{i-1})}).$$

Grâce à la définition des variables τ_i^* , on voit que $\sigma_u^*(\omega) = +\infty$ lorsqu'un des ancêtres de u n'apparaît pas dans l'arbre (c'est à dire lorsque u n'est pas né). On retrouve également les translations $(T_i^*)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Pour tout $\omega_C^* = (c_u)_{u \in \mathcal{U}}$, on définit $T_i^*(\omega_C^*) := (c_{iv})_{v \in \mathcal{U}}$.

On définit alors les arbres de CMJ :

Définition 3.1. Pour tout $\omega_C^* \in \Omega_C^*$, on pose :

$$C(\omega_C^*) = \{(u, c_u), u \in G_C(\omega_C^*)\}.$$

Un arbre de CMJ est alors un élément de $C(\Omega_C^*) := \Omega_C$. On définit également \mathcal{F}_C la tribu image de \mathcal{F}_C^* par C , et \mathbb{P}_C la mesure image de \mathbb{P}_C^* par C .

$$(\Omega_C, \mathcal{F}_C, \mathbb{P}_C)$$

est l'espace probabilisé des arbres de CMJ.

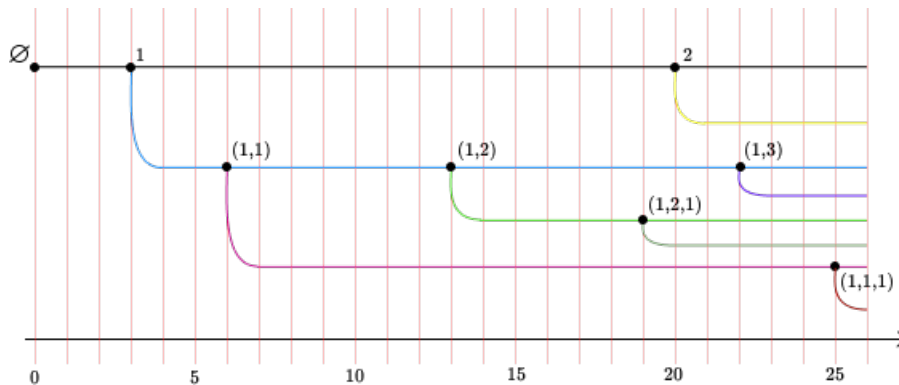


FIGURE 7 – Un exemple d'élément de Ω_C . Les unités de temps verticales sont en rouge.

Dans la Figure 7, on a donc 8 descendance :

$$(3, 20), (3, 10, 19), 19, 6, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset;$$

où les descendance vides correspondent aux individus n'ayant pas eu d'enfants, c'est-à-dire :

$$2, (1, 3), (1, 2, 1), (1, 1, 1).$$

3.2 Lien avec les arbres de Galton-Watson

Étant donné un arbre de CMJ, on peut se contenter de ne regarder que les générations. On obtient alors un arbre de Galton-Watson.

Proposition 3.2. *On définit la variable aléatoire surjective :*

$$\begin{aligned} G_C &: (\Omega_C^*, \mathcal{F}_C^*, \mathbb{P}_C^*) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ \omega_C^* &\longmapsto \{u \in \mathcal{U}, \sigma_u^*(\omega_C^*) < +\infty\}, \end{aligned}$$

où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace des arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $P = \text{Loi}(N^*)$ (avec \mathbb{P} donnée par la Proposition 2.1). **Alors la loi de G_C est exactement la mesure \mathbb{P} .**

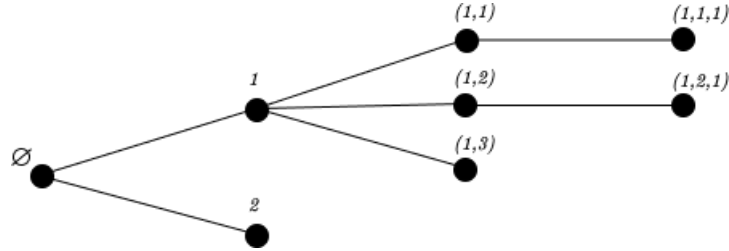


FIGURE 8 – $G_C(\omega_C^*)$ pour ω_C^* de la Figure 7

Dans l'exemple de la Figure 7, $G_C(\omega_C^*) = \{\emptyset, 1, 2, (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$ est représenté en Figure 8.

Démonstration. Premièrement, G_C est surjective car pour tout arbre $\omega \in \Omega$, on pose $c_u = (1, \dots, 1)$ de longueur $N_u(\omega)$; ce qui nous fournit $\omega_C^* = (c_u)_{u \in \mathcal{U}}$ qui vérifie $G_C(\omega_C^*) = \omega$.

Ensuite, on utilise l'unicité dans la Proposition 2.1. Nous allons montrer que la loi de G_C , étant une mesure sur (Ω, \mathcal{F}) , donne à N la loi de N^* ; et rend les translations $(T_i)_{1 \leq i \leq k}$ i.i.d. conditionnellement à $\{N = k\}$. Le premier point découle directement de l'identité suivante :

$$N^* = N \circ G_C.$$

Quant au second, il s'obtient grâce à cette seconde identité :

$$G_C \circ T_i^* = T_i \circ G_C \text{ sur } N^{*-1}(k),$$

car les $(T_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ sont i.i.d. □

La difficulté de l'étude des arbres de CMJ n'est pas dans l'étude de sa généalogie, au sens de l'étude de ses générations, car on récupère déjà tous les résultats connus sur les arbres de Galton-Watson, grâce à la Proposition 3.2. En particulier, on sait déjà que le nombre d'individus de la génération n est donné par un processus de Galton-Watson de loi de reproduction P . En revanche, les générations se superposent, donc on peut imaginer qu'un individu de la génération 1 est encore vivant lorsqu'un individu de la génération 10 naît (par exemple). Si on s'intéresse à l'évolution de la population année après année, il ne suffit plus de regarder les générations. On souhaiterait par exemple connaître le nombre d'individus encore vivants à la date k , ou le nombre de naissances à la date k , ...

3.3 Étude asymptotique de certains CMJ

On commence par restreindre l'ensemble des processus étudiés, en rajoutant des hypothèses sur certaines variables aléatoires. Pour cela, on introduit les $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, définies sur C par :

$$\theta_i = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{\tau_k = i\}},$$

qui correspond au nombre d'enfants que l'individu a eu à l'âge i . On étudie dans la suite les processus de CMJ dits « markoviens en âge », c'est-à-dire qu'on suppose que les $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont **indépendantes**. Cette hypothèse ne restreint que la mesure de probabilité P_C . On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}[\theta_i] = \mu_i < +\infty$. On suppose également que les individus ont un âge limite pour avoir des enfants, que l'on note $p \in \mathbb{N}^*$. C'est-à-dire qu'on impose $\theta_j = 0$ pour $j > p$. Ces simplifications permettent de se ramener à des processus de Galton-Watson Multi-type, que nous allons introduire.

Les processus de Galton-Watson Multi-type sont des versions plus sophistiquées des processus de Galton-Watson : on se donne p « types », référencés par des entiers. Ils peuvent correspondre à un caractère génétique par exemple. À chaque individu on associe un type $i \in I = \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, et cet individu donne naissance à un nombre aléatoire (qui dépend du type de l'individu) d'enfants de chaque type.

Définition 3.2. Pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on se donne $L^{(i)} = ((L_{n,k}^{(i,0)}, L_{n,k}^{(i,1)}, \dots, L_{n,k}^{(i,p-1)}))_{n,k \geq 1}$ une famille de vecteurs i.i.d.. On suppose que les $(L^{(i)})_{i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$ sont indépendants. On définit le processus de Galton-Watson Multi-type Z , initialisé en $z \in \mathbb{N}^p$ par :

$$Z_0 = z; \quad \forall n \geq 0, j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad (Z_{n+1})_j = Z_{n+1,j} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{Z_{n,j}} L_{n+1,k}^{(i,j)}.$$

Ainsi, Z_n est un vecteur aléatoire, dont la j -ième coordonnée correspond nombre d'individus de type j nés à la génération n .

La loi de reproduction du processus est la donnée pour chaque $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ de la loi du vecteur $L^{(i,\cdot)} = (L^{(i,0)}, \dots, L^{(i,p-1)})$.

Pour étudier les processus CMJ « markoviens en âge », il est possible de se ramener aux processus de Galton-Watson Multi-type.

Définition 3.3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ la variable aléatoire suivante sur Ω_C^* :

$$N_{n,j} = \#\{u \in \mathcal{U}, \sigma_u^* = n - j\}.$$

C'est le nombre d'enfant d'âge j à la date n dans l'arbre.

L'idée est la suivante : on associe à chaque individu d'un arbre de CMJ un type, qui est son âge.

Proposition 3.3. *Le processus $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la loi d'un processus de Galton-Watson Multi-type, initialisé en $(1, 0, \dots, 0)$; et où pour tout $i \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket$ la loi de $L^{(i, \cdot)}$ est :*

$$\mathbb{P}[L^{(i, \cdot)} = (x_0, \dots, x_{p-1})] = \begin{cases} P_0(\theta_i = x_0) & \text{si } x_{i+1} = 1; \forall j \neq 0, i+1; x_j = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Et en $i = p-1$:

$$\mathbb{P}[L^{(i, \cdot)} = (x_0, \dots, x_{p-1})] = \begin{cases} P_0(\theta_i = x_0) & \text{si } x_1 = \dots = x_{p-1} = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'un individu de type i fait θ_i enfants de type 0, et 1 enfant de type $i+1$; sauf les individus de type $p-1$ qui ne font que donner naissance à θ_{p-1} individus de type 0. On peut interpréter l'individu de type $i+1$ comme une copie de l'individu de type i , qui a survécu à l'année suivante, et les individus de type 0 comme les enfants nés lorsque l'individu a $i+1$ ans. Pour étudier les CMJ « markoviens en âge », on peut donc de manière équivalente étudier les arbres de GW Multi-type, pour la loi de reproduction donnée ci-dessus.

Démonstration. Admise. On peut cependant définir les variables aléatoires $\theta_i(u)$, qui correspondent au nombre d'enfants de l'individu u à l'âge i . L'hypothèse « markoviens en âge » nous assure alors qu'à i fixé, ces variables sont i.i.d. ; et en plus qu'elles sont indépendantes selon i . Comme on trouve :

$$N_{n+1,0} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{u \in \mathcal{U}, \sigma_u = n-i} \theta_i(u),$$

et comme $N_{n+1,j} = N_{n,j-1}$ lorsque $j \neq 0$, on devrait pouvoir retrouver les variables $L_{n,k}^{(i,j)}$. \square

On étudie maintenant le processus de Galton-Watson Multi-type associé à un CMJ « markovien en âge ». On suppose dans toute la suite que le processus de Galton-Watson Multi-type a pour loi de reproduction celle présentée dans la Proposition 3.3.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$. La suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme alors une filtration. On définit également la matrice M suivante, qui est la matrice des espérances de la loi de

reproduction,

$$M = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{p-2} & \mu_{p-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose dans notre modèle qu'il existe j_1, j_2 des entiers vérifiant :

1. $\text{pgcd}(j_1 + 1, j_2 + 1) = 1$
2. μ_{j_1} et μ_{j_2} sont tous les deux non-nuls.

De plus, on peut supposer, quitte à diminuer p , que μ_{p-1} est non nul, assurant l'inversibilité de M .

Proposition 3.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = MZ_n,$$

où $\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] := (\mathbb{E}[Z_{n+1,0} | \mathcal{F}_n], \dots, \mathbb{E}[Z_{n+1,p-1} | \mathcal{F}_n])$.

Démonstration. Par définition de la loi de notre Galton-Watson Multi-type, pour tout $k > 0$, $Z_{n+1,k} = Z_{n,k-1}$, qui est \mathcal{F}_n mesurable, donc on a l'égalité voulue pour toutes les coordonnées de Z_{n+1} sauf la première. Lorsque $k = 0$, on a :

$$\mathbb{E}[Z_{n+1,0} | \mathcal{F}_n] = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{Z_{n,i}} \mathbb{E}[L_{n+1,k}^{(i,0)} | \mathcal{F}_n].$$

Or, $L_{n+1,k}^{(i,0)}$ est indépendante de \mathcal{F}_n , et identiquement distribuée selon k et n . D'où :

$$\mathbb{E}[Z_{n+1,0} | \mathcal{F}_n] = \sum_{i=0}^{p-1} Z_{n,i} \times \mu_i.$$

□

Cette relation est similaire au cas des arbres de Galton-Watson classiques, et elle nous permet encore une fois de trouver une martingale :

$$Y_n = M^{-n} Z_n.$$

En effet, par linéarité de l'espérance conditionnelle, on a :

$$\mathbb{E}[M^{-(n+1)} Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M^{-(n+1)} \mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M^{-n} Z_n = Y_n.$$

Néanmoins, il n'y a à priori aucun raison que cette martingale soit positive, car les coefficients de M^{-n} peuvent être négatifs. On n'a pas directement un résultat de convergence presque sûre. On peut

cependant déjà calculer l'espérance de Z_n , au sens de l'espérance de chacune de ses coordonnées :

$$\mathbb{E}[Z_n] = M^n Z_0,$$

On est donc amené à étudier M^n .

Théorème 3.1. *M admet une unique valeur propre ρ réelle positive. De plus, elle est maximale (c'est-à-dire que pour tout autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \rho$), et de multiplicité 1. Par ailleurs, le vecteur $c = (1, \rho^{-1}, \dots, \rho^{-(p-1)})$ est un vecteur propre à droite pour ρ .*

Démonstration. Soit $x = (x_0, \dots, x_{p-1})$ un vecteur propre non-nul pour λ une valeur propre. Alors il vérifie :

$$\begin{aligned} \lambda x_0 &= \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i x_i \\ \lambda x_1 &= x_0 \\ \lambda x_2 &= x_1 \\ &\dots \\ \lambda x_{p-1} &= x_{p-2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $x_0 \neq 0$, et λ vérifie :

$$Q\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1,$$

où $Q(z) = z \sum_{k=0}^{p-1} \mu_k z^k$. La donnée d'une solution z_0 de l'équation $Q(z) = 1$, nous fournit un vecteur $(1, z_0, \dots, z_0^{p-1})$ qui est un vecteur propre pour la valeur propre $\frac{1}{z_0}$. Ainsi, on a :

$$Sp(M) \stackrel{1/z}{\simeq} \{z \in \mathbb{C}, Q(z) = 1\},$$

$Q|_{\mathbb{R}_+}$ est strictement croissante, vaut 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi, elle vaut 1 en une unique valeur strictement positive (Théorème des valeurs intermédiaires). On la note ρ^{-1} , ce qui nous fournit ρ l'unique valeur propre positive de M .

Montrons désormais qu'elle est maximale. C'est équivalent à montrer que ρ^{-1} est la plus petite solution (en module) de l'équation $Q(z) = 1$. Soit z une autre solution. Supposons par l'absurde que $|z| \leq \rho^{-1}$, alors :

$$1 = |Q(z)| \leq Q(|z|).$$

On distingue alors deux cas :

- Si $|z| < \rho^{-1}$, alors par stricte croissance de $Q|_{\mathbb{R}_+}$, on aurait $1 < Q(\rho^{-1}) = 1$, ce qui est impossible.
- Si $|z| = \rho^{-1}$, alors $z = \rho^{-1} e^{i\theta}$, et donc :

$$|Q(z)| = Q(|z|).$$

Ainsi, par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les complexes $(\mu_k \rho^{-(k+1)} e^{i\theta(k+1)})_{0 \leq k \leq p}$

sont positivement colinéaires. Ils ont donc (dès qu'ils ne sont pas nuls) le même argument, et en particulier :

$$\left(\sum_{k=0}^{p-1} \mu_k \rho^{-(k+1)} \right) e^{i\theta(j_1+1)} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \mu_k \rho^{-(k+1)} \right) e^{i\theta(j_2+1)} = 1,$$

car μ_{j_1} et μ_{j_2} sont strictement positifs. D'où :

$$\theta(j_2 + 1) \equiv \theta(j_1 + 1) \equiv 0[2\pi].$$

Mais alors, $e^{i\theta}$ est une racine de l'unité d'ordre fini, qui divise $j_1 + 1$ et $j_2 + 1$. Il est donc plus petit que leur pgcd, qui vaut 1. Ainsi, $e^{i\theta}$ est d'ordre 1, donc $\theta = 0$ et $z \in \mathbb{R}_+$. On trouve que $z = \rho^{-1}$.

Il n'y a donc pas de racine complexe de module plus petit que ρ^{-1} ; ρ est donc maximale.

Pour la multiplicité, on utilise la règle des signes de Descartes. Elle stipule que, pour un polynôme réel, le nombre de racines positives (comptées avec leur multiplicité) est inférieur ou égal au nombre de changements de signes dans les coefficients du polynôme. Ici, le calcul du polynôme caractéristique de M nous fournit la formule de récurrence :

$$\chi_{p-1} = -X\chi_{p-2} + (-1)^{p-1}\mu_{p-1}.$$

Par récurrence, on a une seule alternance de signe dans χ_{p-1} , donc au plus une racine positive. \square

Remarque. Ce résultat se retrouve aussi directement par le Théorème de Perron-Frobenius.

Proposition 3.5. *Il existe b un vecteur propre à gauche positif de M pour ρ , tel que :*

$$M^n \sim \rho^n c^t b.$$

Démonstration. On note $(\rho_i)_{i=0}^r$ les valeurs propres, avec $\rho_0 = \rho$. On utilise la décomposition de Jordan de M . Il existe donc A semblable à M , de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} J_0 & & & & \\ & J_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_r \end{pmatrix},$$

où J_k est une matrice carrée de taille n_k , qui est la multiplicité de ρ_k . De plus, $J_k = \rho_k I_{n_k} + N_k$, où N_k ne contient que des 0 sauf une surdiagonale de 1. Comme ρ est de multiplicité 1, on a $J_0 = \rho$. On note P la matrice des vecteurs propres à droite de M , en colonne; et P^{-1} son inverse, de telle sorte que :

$$M = PAP^{-1}.$$

Remarquons que :

$${}^t e_1 P^{-1} M = {}^t e_1 A P^{-1} = \rho ({}^t e_1 P^{-1}).$$

Donc la première ligne de P^{-1} est un vecteur propre à gauche de M associé à ρ , notons le b . Comme I_{n_k} commute avec N_k on trouve pour tout $n \geq p$:

$$\frac{J_k^n}{\rho^n} = \left(\frac{\rho_k}{\rho}\right)^n \times \sum_{i=0}^p \binom{n}{i} N_k^i,$$

car, $N_k^j = 0$ pour tout $j \geq n_k$, et $p \geq n_k$. D'où :

$$\left| \frac{J_k^n}{\rho^n} \right| \leq \left| \frac{\rho_k}{\rho} \right|^n \times an^p,$$

pour une constante $a \geq 0$. Comme ρ est maximale, $\frac{\rho_k}{\rho} < 1$, donc $\frac{J_k^n}{\rho^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi :

$$\frac{M^n}{\rho^n} \sim PE_{1,1}P^{-1} = c^t b.$$

Tout vecteur propre y à gauche de M pour λ , ayant pour première coordonnée 1 vérifie, pour tout $k \geq 1$:

$$y_k = \lambda^{k-1} \sum_{j=k}^{p-1} \frac{\mu_j}{\lambda^j}.$$

En particulier, tous les coefficients de b sont de même signe. Comme $P^{-1}P = I_{p-1}$, $\sum_{i=0}^{p-1} b_i \rho^{-i} = 1$, b ne peut être que positif. \square

Proposition 3.6. *On a un équivalent simple pour l'espérance de Z_n :*

$$\mathbb{E}[Z_n] \sim b_1(\rho^n, \rho^{n-1}, \dots, \rho^{n-(p-1)}).$$

Démonstration. Par la Proposition 3.5, $\mathbb{E}[Z_n] \sim \rho^n c^t b Z_0 = b_1 \rho^n c$, car ${}^t b Z_0 = b_1$. \square

La croissance en moyenne d'un CMJ « markovien en âge » est exponentielle, comme dans le cas des arbres de Galton-Watson classiques vus en première partie. Le taux de croissance est donné par ρ , valeur propre dominante de la matrice de reproduction M . Comme précédemment, il est intéressant de savoir quand est-ce que $\rho > 1$, $\rho = 1$, $\rho < 1$; selon les coefficients $(\mu_i)_{0 \leq i \leq p-1}$. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 3.7. *Soit $m = \sum_{i=0}^{p-1} \mu_i$. Alors on a la trichotomie suivante :*

1. Si $m > 1$, alors $\rho > 1$.
2. Si $m = 1$, alors $\rho = 1$.
3. Si $m < 1$, alors $\rho < 1$.

Démonstration. D'après la preuve du Théorème 3.1, on remarque que $Q(1) = m$. Ainsi, si $m > 1$ alors $\rho^{-1} < 1$ car $Q|_{\mathbb{R}_+}$ est strictement croissante. De même, si $m = 1$, alors $1 = m = \rho^{-1}$. L'argument est identique lorsque $m < 1$. \square

Remarquons que m est la moyenne de la loi de reproduction pour l'arbre de Galton-Watson associé à notre CMJ « markovien en âge » (Proposition 3.2). On a donc montré que le fait que la taille moyenne de la population explose ou non ne dépend pas de l'échelle de temps choisie (générations ou années); ce qui semble assez intuitif.

Le nombre moyen d'individus de type 0 de la génération n du Galton-Watson Multi-type associé au CMJ est le nombre moyen de naissances à la date n dans le CMJ. Par la Proposition 3.6, on sait qu'il est multiplié par ρ d'une année à l'autre. En revanche, le nombre moyen de naissance d'une génération du CMJ à une autre est multiplié par m . Dans les deux cas, la croissance est exponentielle.

On souhaiterait désormais retrouver les résultats de convergence presque sûre des Galton-Watson classiques dans le cas des CMJ « markoviens en âge ». Comme souligné précédemment, on ne peut pas appliquer directement un théorème de convergence presque sûre de martingale à $Y_n = M^{-n}Z_n$, car on n'est pas assuré de sa positivité. En revanche, un changement de base nous permet de nous ramener à une martingale plus sympathique. On pose $W_n = P^{-1}Y_n = P^{-1}M^{-n}Z_n = A^{-n}P^{-1}Z_n$. Ainsi, $P^{-1}Z_n$ représente le vecteur Z_n dans les coordonnées de la base des vecteurs propres de M . C'est encore une \mathcal{F}_n -martingale par linéarité de l'espérance conditionnelle. Mais la suite de ses premières coordonnées a le bon goût d'être positive, car :

$$W_{n,0} = (A^{-n}P^{-1}Z_n)_0 = \rho^{-n} \langle b, Z_n \rangle,$$

et b est positif. On sait alors (Théorème de convergence presque-sûre d'une martingale positive) qu'elle converge presque sûrement vers une limite W . Néanmoins, on ne peut à priori rien dire sur les autres coordonnées de W_n , bien qu'elles soient elles aussi des martingales.

Le théorème suivant, issu de l'article [KLPP97], nous donne une convergence presque sûre :

Théorème 3.2.

$$\frac{Z_n}{\rho^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Wb,$$

presque sûrement.

Démonstration. Admise. □

Il existe, comme dans le cas des arbres de Galton-Watson, un théorème similaire au Théorème 1.3. La preuve présentée dans l'article [KLPP97] utilise les mêmes méthodes que celles utilisées ici pour montrer le Théorème 1.3; c'est-à-dire qu'on construit un espace d'arbres, sur lequel on effectue un changement de mesure qui nous permet de nous ramener à un cas d'arbre avec immigration. Cette approche de « décomposition épinale » s'adapte dans le cas des processus CMJ, pas nécessairement « markoviens en âge », et est décrite dans l'article [JS08].

4 Annexe

4.1 Cas critique d'un processus de Galton-Watson

On sait déjà dans ce cas que la population est vouée à disparaître, donc $\mathbb{P}(Z_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - g_n(0) \rightarrow 0$. Le théorème suivant fournit des informations sur notamment la vitesse de cette convergence.

Théorème 4.1. *Si $m = 1$ et $\sigma^2 < +\infty$, alors :*

1. $n\mathbb{P}(Z_n > 0) \rightarrow \frac{2}{\sigma^2}$.
2. $\frac{\mathbb{E}[Z_n | Z_n > 0]}{n} \rightarrow \frac{\sigma^2}{2}$.
3. $\text{Loi}\left(\frac{Z_n}{n} | Z_n > 0\right) \rightarrow \text{Exp}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)$.

Autrement dit, dans le cas critique, lorsque la loi de reproduction admet une variance, il y a en moyenne $\frac{\sigma^2}{2}n$ individu à la génération n , lorsque la population a survécu. Avant de montrer le théorème, on prouve un lemme :

Lemme 4.1 (Théorème de Cesàro). *Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels positifs qui converge vers 0. Alors :*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

converge vers 0 également.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, comme $(u_k)_{k \geq 0}$ tend vers 0, il existe un rang k_0 , à partir duquel $u_k \leq \frac{\epsilon}{2}$. On a donc, pour tout $N > k_0$:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k_0} u_k + \frac{N - k_0 - 1}{N} \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k_0} u_k + \frac{\epsilon}{2}.$$

Mais pour N assez grand, on a aussi, comme k_0 est indépendant de N , $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k_0} u_k \leq \frac{\epsilon}{2}$. D'où, pour N assez grand, $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \leq \epsilon$. \square

Démonstration du Théorème 4.1. Remarquons d'abord que le point 2. découle du point 1. :

$$\frac{\mathbb{E}[Z_n | Z_n > 0]}{n} = \frac{\mathbb{E}[Z_n \mathbb{1}_{Z_n > 0}]}{n\mathbb{P}(Z_n > 0)}.$$

Or, $E[Z_n \mathbb{1}_{Z_n > 0}] = E[Z_n] = 1$, d'où 2.

Pour le point 1., on remarque que :

$$n\mathbb{P}(Z_n > 0) = n(1 - g_n(0)) = \left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - g_n(0)} - 1 \right) + \frac{1}{n} \right)^{-1}.$$

Ce qui nous permet d'exploiter le développement de Taylor suivant de g au voisinage de 1 :

$$g(s) = g(1) - (1-s)g'(1) + \frac{(1-s)^2}{2}g''(1) + \int_s^1 \frac{(1-t)^2}{2}g^{(3)}(t)dt.$$

Or, $g'(1) = m = 1$, $g''(1) = \sigma^2$, donc :

$$g(s) = s + \frac{(1-s)^2}{2}\sigma^2 + (1-s)^2\omega(s),$$

où on a posé :

$$0 \leq \omega(s) := \frac{\int_s^1 \frac{(1-t)^2}{2}g^{(3)}(t)dt}{(1-s)^2} \leq \frac{g''(1) - g''(s)}{2}.$$

Donc en particulier, on a : $\omega(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} 0$, et ω est bornée sur $[0, 1]$.

On a de plus, pour tout $s \in [0, 1[$:

$$\frac{1}{1-g(s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{g(s) - s}{(1-g(s))(1-s)} = \frac{\frac{\sigma^2}{2} + \omega(s)}{1 - \frac{(1-s)^2}{2}\sigma^2 - (1-s)\omega(s)} = \frac{\sigma^2}{2} + \beta(s),$$

où $\beta(s) := \frac{\frac{\sigma^2}{2} + \omega(s)}{1 - \frac{(1-s)^2}{2}\sigma^2 - (1-s)\omega(s)} - \frac{\sigma^2}{2}$ vérifie aussi : $\beta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} 0$, et est bornée.

Ainsi, on a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1-g_n(s)} - \frac{1}{1-s} \right) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-g_{k+1}(s)} - \frac{1}{1-g_k(s)} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta(g_k(s)). \end{aligned}$$

Or, la suite de fonctions $(g_k)_{k \geq 0}$ converge uniformément vers 1. En effet :

$$\sup_{s \in [0,1]} |1 - g_k(s)| = 1 - g_k(0),$$

car g_k est croissante et à valeur dans $[0, 1]$. Comme 1 est le seul point fixe, on a bien $\sup_{s \in [0,1]} |1 - g_k(s)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, par continuité de β , on sait que $\sup_{s \in [0,1]} |\beta(g_k(s))| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Par le Lemme 4.1, on a donc la convergence uniformément en s :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{1-g_n(s)} - \frac{1}{1-s} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{2}.$$

En particulier, en $s = 0$, on prouve le point 1.

Pour le point 3., on pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$s_n = e^{-\frac{t}{n}}.$$

Remarquons que cette suite tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Pour montrer la convergence de

(Loi($\frac{Z_n}{n} | Z_n > 0$)) $_{n \geq 1}$ On va utiliser la convergence en fonction caractéristique, et montrer que :

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{t}{n}Z_n} | Z_n > 0] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{-\frac{\sigma^2}{2}x} dx.$$

En effet :

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{t}{n}Z_n} | Z_n > 0] = \frac{g_n(s_n) - g_n(0)}{1 - g_n(0)} = 1 - \frac{1 - g_n(s_n)}{1 - g_n(0)}.$$

Et on remarque que cette dernière valeur est aussi égale à :

$$1 - \frac{1}{n(1 - g_n(0))} \left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - g_n(s_n)} - \frac{1}{1 - s_n} \right) + \frac{1}{n(1 - s_n)} \right)^{-1}.$$

Or, comme $t > 0$, $\frac{1}{n(1 - s_n)} = \frac{1}{te^{-\frac{t}{n}} + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t}$. Et de plus, par la convergence uniforme prouvée précédemment, on a que :

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{t}{n}Z_n} | Z_n > 0] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{t} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{2}t} = \int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{-\frac{\sigma^2}{2}x} dx.$$

□

Références

- [Bre21] Jean-Christophe Breton. Notes de cours M1, Chaînes de Markov et martingales, 2021.
- [CM18] Djilil Chafaï and Florent Malrieu. *Recueil de modèles aléatoires*. October 2018.
- [Dur19] Rick Durrett. *Probability : Theory and Examples*. 2019.
- [JS08] Peter Jagers and Serik Sagitov. General branching processes in discrete time as random trees. *Bernoulli*, 14(4) :949 – 962, 2008.
- [KLPP97] Thomas Kurtz, Russell Lyons, Robin Pemantle, and Yuval Peres. *A Conceptual Proof of the Kesten-Stigum Theorem for Multi-Type Branching Processes*, pages 181–185, version of 7 Sept 2009. Springer New York, New York, NY, 1997.
- [Nev86] J. Neveu. Arbres et processus de Galton-Watson. *Annales de l'I.H.P.*, pages 199 – 207, 1986.
- [RLP95] Robin Pemantle Russell Lyons and Yuval Peres. Conceptual proofs of LlogL criteria for mean behaviour of branching processes. *The Annals of Probability*, 23(3) :1125 – 1138, 1995.
- [Sen70] E. Seneta. On the supercritical galton-watson process with immigration. *Mathematical Biosciences*, 7(1) :9–14, 1970.
- [Shi15] Zhan Shi. *Branching Random Walks*. 2015.