Un Théorème de Perron-Frobenius

Le théorème présenté est un joli résultat liant les matrices stochastiques et les groupes, en passant par les valeurs propres et les nombres complexes de module 1. Il existe différentes versions du théorème de Perron-Frobenius, selon les hypothèses sur la matrice.
On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses lignes sont des mesures de probabilités sur $[\![1, n]\!]$. La notion d'irréductibilité est la suivante.

Définition

Une matrice stochastique A est dite **irréductible** lorsque :

$$\forall (k, l) \in [\![1, n]\!], \exists m \in \mathbb{N}^*, A^m(k, l) > 0.$$

En fait, si l'on représente le graphe associé à la matrice stochastique **irréductible** A ; on observe qu'il est *connexe par arcs*. C'est-à-dire, pour toute paire de sommets (k, l), il existe un chemin (de m sauts) menant k à l.

Théorème

Soit A une matrice stochastique **irréductible**. Alors :

$$\rho(A) = 1 \text{ et } \sigma(P) \cap \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$$

est un **sous-groupe fini des racines de l'unité**.

On montre le théorème en 2 étapes :

1. $\boldsymbol{\rho(A) = 1}$**.**
2. $\boldsymbol{\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1}$ **est un sous-groupe de** $\mathbb{S}^1$**.**

1 $\rho(A) = 1$.

On remarque que 1 est valeur propre de A, de vecteur propre $(1, \ldots, 1)$. De plus, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, de vecteur propre $X \in \mathbb{C}^n$, on note $k_0 \in [\![1, n]\!]$ l'indice tel que :

$$|X_{k_0}| = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |X_k|.$$

C'est-à-dire tel que X_{k_0} est de module maximal parmi les coordonnées de X. Rien n'assure l'unicité d'un tel indice k_0 (en fait on verra dans la partie 2 qu'on est vraiment loin de l'unicité).
On a alors, par **inégalité triangulaire** :

$$|(AX)_{k_0}| \leq \sum_l A_{k_0,l}|X_l| \leq \left(\sum_l A_{k_0,l} \right) |X_{k_0}| = |X_{k_0}|. \tag{1}$$

Or, $(AX)_{k_0} = \lambda X_{k_0}$ car X est un vecteur propre. Comme $|X_{k_0}| \neq 0$ (X est un vecteur propre !), $|\lambda| \leq 1$. On a bien montré que $\rho(A) \leq 1$.

2 $\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1$ est un sous-groupe de $\mathbb{S}^1$.

On montre pour cela le lemme suivant.

Lemme

Soit A une matrice stochastique et $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{S}^1$, de vecteur propre X. Alors en notant X_{k_0} une coordonnée de module maximal :

$$\forall l \in [\![1, n]\!], A_{k_0,l} X_l = A_{k_0,l}.\lambda X_{k_0}.$$

Preuve

Comme $|\lambda| = 1$, les inégalités (1) sont des égalités. Ainsi, par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, la famille de complexes $(A_{k_0,l} X_l)_l$ est $\mathbb{R}$-positivement liée, c'est-à-dire qu'ils sont sur une même demi-droite dans $\mathbb{C}$. Par décomposition polaire, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall l \in [\![1, n]\!], A_{k_0,l} X_l = A_{k_0,l} |X_l| e^{i\theta}.$$

(Si certains des complexes sont nuls, l'égalité est vraie quelque soit θ). De plus :

$$\forall l \in [\![1,n]\!], A_{k_0,l}|X_l| = A_{k_0,l}|X_{k_0}|.$$

En effet, on sait déjà que $A_{k_0,l}|X_l| \leq A_{k_0,l}|X_{k_0}|$ pour tout l. Et par l'absurde, s'il existe l tel que $A_{k_0,l}|X_l| > A_{k_0,l}|X_{k_0}|$, alors on aurait :

$$\sum_l A_{k_0,l}|X_l| < \left(\sum_l A_{k_0,l}\right)|X_{k_0}|,$$

ce qui contredit (1).
En combinant ces deux égalités, on obtient, pour tout l, $A_{k_0,l}X_l = A_{k_0,l}|X_{k_0}|e^{i\theta}$. De plus, en sommant, $\lambda X_{k_0} = |X_{k_0}|e^{i\theta}$. Ainsi, pour tout l,

$$A_{k_0,l}X_l = A_{k_0,l}.\lambda X_{k_0}.$$

□

Soit $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{S}^1$, de vecteur propre X. On utilise l'irréductibilité de A pour montrer que **toutes** les coordonnées de X sont de même module. On note $|X_{k_0}|$ une coordonnée maximale. Pour tout $l \in [\![1,n]\!]$, il existe (par irréductibilité) $m \geq 1$ tel que :

$$A^m(k_0,l) > 0.$$

Or, A^m est stochastique, et λ^m est valeur propre de A^m, de vecteur propre X. Le lemme appliqué à A^m, λ et X montre alors que :

$$A^m_{k_0,l}X_l = A^m_{k_0,l}.\lambda^m X_{k_0},$$

et donc que $X_l = \lambda^m X_{k_0}$ car $A^m_{k_0,l} > 0$. Conclusion : toutes les coordonnées de X sont de même module, et donc toutes maximales ! On conclut la démonstration du théorème en montrant que $\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1$ est stable par produit et par inverse (il contient 1 par la partie 1). Soient λ, μ deux valeurs propres de A de module 1. On note X et Y des vecteurs propres respectifs. On montre alors que $Z := (X_k.Y_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un vecteur propre pour $\lambda.\mu$ (on multiplie bêtement les coordonnées terme à terme !). Comme X et Y ont toutes leurs coordonnées de même module, Z n'est pas nul. De plus, pour $k \in [\![1,n]\!]$:

$$(AZ)_k = \sum_l A_{k,l}X_lY_l.$$

Or, X_k est de module maximal donc par le lemme, $A_{k,l}X_l = \lambda A_{k,l}X_k$. En remplaçant dans la somme on obtient :

$$(AZ)_k = \lambda X_k \sum_l A_{k,l}Y_l = \lambda.\mu X_kY_k = \lambda.\mu Z_k$$

car Y est vecteur propre pour μ. Ainsi, $\lambda.\mu \in \sigma(A) \cap \mathbb{S}^1$. Pour la stabilité par passage à l'inverse, il suffit de remarquer que pour $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{S}^1$, $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$ est toujours de module 1, et est toujours valeur propre de A car racine du polynôme caractéristique (à coefficients réels !). Ceci achève la preuve.

3 Références.

1. Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. Oraux X-ENS, Algèbre 2. Pages 83-85.
2. Denis Serre. Les Matrices, Théorie et pratique. 2001.